

Ricardo Mendes Grande
Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

O símbolo e a realidade

Sobre o papel da
notação matemática
como auxiliar na
resolução de problemas

Prefácio de
Oswaldo Pessoa Jr.



Há uma tradição de obras de divulgação de matemática, como as de Malba Tahan, Martin Gardner e Ian Stewart, que passeiam por diferentes temas do mar da matemática, mergulhando em cada um deles, explorando-os e retornando à superfície, para prosseguir cruzeiro. Esta rica obra dos dois Ricardos faz esse tipo de exploração, guiados pelo tema dos signos matemáticos, suas regras de uso, seus sentidos e como podem mediar a representação da realidade. O livro trata da filosofia da matemática e do papel da notação matemática. Qual é a relevância da notação matemática? Será que ela é dispensável, sendo a matemática uma atividade essencialmente mental que usa a notação apenas como um auxílio mnemônico? Ou, pelo contrário, será que na notação está contida toda a matemática? Os autores adotam uma posição intermediária, de que a notação não desempenha um mero papel auxiliar, mas que de certa forma “fabrica nossa vida psíquica”. Vários exemplos são dados de como uma escolha de notação ou formalismo pode sugerir novas questões, como a ideia de uma derivada de ordem fracionária, que segue naturalmente da notação continental do cálculo, ou as escolhas diagramáticas feitas por Richard Feynman em sua eletrodinâmica quântica, exploradas didaticamente em um apêndice. Os autores também exploram a extensão ou aumento de um domínio matemático, como ocorre com a definição dos números complexos ou do cálculo tensorial. Apresentam uma concepção da matemática como explicitação de estruturas, e discutem como, às vezes, a ciência vislumbra estruturas matemáticas na realidade observável ou mesmo projeta semelhantes estruturas “por detrás” das aparências.



Oswaldo Pessoa Jr.
Universidade de São Paulo



O símbolo e a realidade



SÉRIE Processos Formativos

Diretores da Série:

Prof. Dr. Harryson Júnio Lessa Gonçalves
(Unesp/FEIS)

Prof. Dr. Humberto Perinelli Neto
(Unesp/IBILCE)

Comitê Editorial Científico:

Prof. Dr. Adriano Vargas Freitas
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Prof. Dr. Alejandro Pimienta Betancur
Universidad de Antioquia (Colômbia)

Alexandre Maia do Bomfim
Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ)

Prof. Dr. Alexandre Pacheco
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)

Prof. Dra. Ana Cláudia Ribeiro de Souza
Instituto Federal do Amazonas (IFAM)

Prof.ª Dr.ª Ana Clédina Rodrigues Gomes
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA)

Prof.ª Dr.ª Ana Lúcia Braz Dias
Central Michigan University (CMU/EUA)

Prof.ª Dr.ª Ana Maria de Andrade Caldeira
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)

Prof. Dr. Armando Traldi Júnior
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP)

Prof. Dr. Daniel Fernando Johnson Mardones
Universidad de Chile (UCHile)

Prof.ª Dr.ª Deise Aparecida Peralta
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)

Prof. Dr. Eder Pires de Camargo
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)

Prof. Dr. Elenilton Vieira Godoy
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Prof. Dr. Elison Paim
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof. Dr. Fernando Seffner
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Prof. Dr. George Gadanidis
Western University, Canadá

Prof. Dr. Gilson Bispo de Jesus
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB)

Prof.ª Dra. Ilane Ferreira Cavalcante
Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN)

Prof. Dr. João Ricardo Viola dos Santos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)

Prof. Dr. José Eustáquio Romão
Universidade Nove de Julho e Instituto Paulo Freire (Uninove e IPF)

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Prof. Dr. José Sávio Bicho de Oliveira
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA)

Prof. Dr. Klinger Teodoro Ciriaco
Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR)

Prof.ª Dr.ª Lucélia Tavares Guimarães
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS)

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)

Prof.ª Dr.ª Márcia Regina da Silva
Universidade de São Paulo (USP)

Prof.ª Dr.ª Maria Altina Silva Ramos
Universidade do Minho, Portugal

Prof.ª Dr.ª Maria Elizabeth Bianconcini de Almeida
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)

Prof.ª Dr.ª Olga Maria Pombo Martins
Universidade de Lísboa (Portugal)

Prof. Dr. Paulo Gabriel Franco dos Santos
Universidade de Brasília (UnB)

Prof. Dr. Ricardo Cantoral
Centro de Investigación e Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav, México)

Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paziani
Universidade do Oeste do Paraná (UNIOESTE)

Prof. Dr. Sidinei Cruz Sobrinho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense (IFSUL/Passo Fundo)

Prof. Dr. Vlademir Marim
Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Prof. Dr. Wagner Barbosa de Lima Palanch
Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL)

O símbolo e a realidade

Sobre o papel da notação matemática como
auxiliar na resolução de problemas

Ricardo Mendes Grande
Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva



Diagramação: Marcelo A. S. Alves

Capa: Carole Kümmecke - <https://www.conceptualeditora.com/>

O padrão ortográfico e o sistema de citações e referências bibliográficas são prerrogativas de cada autor. Da mesma forma, o conteúdo de cada capítulo é de inteira e exclusiva responsabilidade de seu respectivo autor.



Todos os livros publicados pela Editora Fi estão sob os direitos da [Creative Commons 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pt_BR) https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pt_BR



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

GRANDE, Ricardo Mendes; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da

O símbolo e a realidade: sobre o papel da notação matemática como auxiliar na resolução de problemas [recurso eletrônico] / Ricardo Mendes Grande; Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva -- Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2021.

150 p.

ISBN - 978-65-5917-251-1

DOI - 10.22350/9786559172511

Disponível em: <http://www.editorafi.org>

1. Notação matemática; 2. Resolução; 3. Problemas; 4. Filosofia; 5. Ciência; I. Título.

CDD: 510

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemáticas 510

Os autores agradecem a Osvaldo Pessoa Jr. Também, ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Processo: 428323/2018-19), ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos da Universidade Estadual Paulista e ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista pelo apoio acadêmico.

Ricardo Mendes Grande dedica este livro a Maria Eugênia Mendes, Thaís Helena Smilgys, Eloésio Paulo, Felipe A. Velozo, Kate Santana, Rebeca Killer e Carlos Roberto Ferreira.

Sumário

Prefácio **11**

Oswaldo Pessoa Jr.

1 **13**

Introdução

- 1.1 O fascínio pelos números 13
- 1.2 Objetivos, linguagem e reflexão filosófica 16

2 **22**

Tipos de notação

3 **29**

Funções básicas da notação matemática

- 3.1 Preâmbulo filosófico 29
- 3.2 Aspectos fundamentais da notação 31

4 **67**

O símbolo e a realidade - análise filosófica

- 4.1 Realidade fenomênica 67
- 4.2 O Estruturalismo e o realismo de Born 73

5 **77**

Conclusões

6 **79**

Apêndice: raciocínio diagramático em mecânica quântica

- 6.1 Introdução histórica 79
- 6.2 O que é um diagrama de Feynman? 82
 - 6.2.1 Raciocínios diagramáticos 82
 - 6.2.2 Diagramas de Feynman 85

6.3 O que exatamente um diagrama de Feynman representa?	88
6.3.1 A matemática e a realidade empírica	88
6.3.2 Diagramática geral – uma abordagem informal.....	90
6.3.3 Exemplo prático	92
6.4 Observações	94
6.5 Conclusões	95

7 **96**

Apêndice: o pensamento simbólico em Granger

7.1 Introdução.....	96
7.2 Forma e conteúdo na física	101
7.3 Paradigma e tema	105
7.4 Conteúdo formal – do grau zero da relação forma-conteúdo ao surgimento do objeto matemático.....	108
7.4.1 Grau zero da relação forma-conteúdo e o cálculo proposicional.....	108
7.4.2 Objeto matemático.....	110
7.5 Conclusões.....	114

8 **116**

Apêndice: Sobre a história da matemática e o uso de recursos computacionais como auxílio para resolução de problemas

Episódio 1: Quadratura do Círculo no Egito Antigo	117
Episódio 2: Proposição 2 do Livro XII de Os Elementos de Euclides	121
Episódio 3: O Método de Arquimedes, Proposição 4.....	129
Conclusões	132

Referências **133**

Prefácio

Oswaldo Pessoa Jr.

Há uma tradição de obras de divulgação de matemática, como as de Malba Tahan, Martin Gardner e Ian Stewart, que passeiam por diferentes temas do mar da matemática, mergulhando em cada um deles, explorando-os e retornando à superfície, para prosseguir cruzeiro. Esta rica obra dos dois Ricardos faz esse tipo de exploração, guiados pelo tema dos signos matemáticos, suas regras de uso, seus sentidos e como podem mediar a representação da realidade.

O livro trata da filosofia da matemática e do papel da notação matemática. Qual é a relevância da notação matemática? Será que ela é dispensável, sendo a matemática uma atividade essencialmente mental que usa a notação apenas como um auxílio mnemônico? Ou, pelo contrário, será que na notação está contida toda a matemática? Os autores adotam uma posição intermediária, de que a notação não desempenha um mero papel auxiliar, mas que de certa forma “fabrica nossa vida psíquica”.

Vários exemplos são dados de como uma escolha de notação ou formalismo pode sugerir novas questões, como a ideia de uma derivada de ordem fracionária, que segue naturalmente da notação continental do cálculo, ou as escolhas diagramáticas feitas por Richard Feynman em sua eletrodinâmica quântica, exploradas didaticamente em um apêndice.

Os autores também exploram a extensão ou aumento de um domínio matemático, como ocorre com a definição dos números complexos ou do cálculo tensorial. Apresentam uma concepção da matemática como explicitação de estruturas, e discutem como, às vezes, a ciência vislumbra

estruturas matemáticas na realidade observável ou mesmo projeta semelhantes estruturas “por detrás” das aparências.

Além do apêndice sobre os diagramas de Feynman, há um segundo apêndice que discute criticamente a concepção do filósofo francês Gilles-Gaston Granger sobre a matemática, criticando especialmente sua noção de “conteúdo formal”. Por fim, um terceiro apêndice explora heurísticamente problemas matemáticos da Antiguidade com o auxílio de um software de matemática dinâmica.

Em suma, o texto faz uma interessante jornada por diferentes formas de notação matemática salientando o papel ativo que tais simbologias têm para o sucesso do empreendimento matemático. Ele combina de maneira elegante a filosofia da matemática com a história da matemática, e é de interesse também para a área de educação matemática.

Universidade de São Paulo

1

Introdução

1.1 O fascínio pelos números

Os símbolos que ele encontrou devem soar em seu louvor,
A conduzi-lo por caminhos inimagináveis,
A novas conquistas em mundos sequer criados – J. C. Maxwell (Cajori, p. 1,
1923).

A filosofia encontra-se escrita neste grande livro que continuamente se abre perante nossos olhos (isto é, o universo), que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito em língua matemática, os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas, sem cujos meios é impossível entender humanamente as palavras; sem eles, vagamos perdidos dentro de um obscuro labirinto – Galileu (p. 119, 1983).

O fascínio pelos números é algo bastante antigo e que não se restringe a uma cultura ou período histórico específico. Atribui-se¹, por exemplo, a seguinte citação a Santo Agostinho: “Os números são a linguagem universal oferecida pela deidade aos homens como confirmação da verdade”. Leibniz também foi um entusiasta do pensamento simbólico, o que fica claro em sua *Characteristca Universalis (General Characteristic)*:

Os homens foram convencidos, desde Pitágoras, de que os mais profundos mistérios estão escondidos nos números. É possível que Pitágoras tenha trazido essa opinião, como muitos outros do oriente e da Grécia. Mas, devido ao desconhecimento da razão do mistério, muitas mentes inquisitivas caíram

¹ Não conseguimos checar a autenticidade da citação, a qual retiramos de: <https://en.wikipedia.org/wiki/Numerology>

em futilidades e superstições, das quais surgiu um tipo popular de Cabala (Leibniz, p. 221, 1989).

No contexto da filosofia grega, os pitagóricos não viam nos números apenas um caminho para o conhecimento do mundo, mas a sua própria estrutura, daí a célebre citação “tudo é número”. Platão, por sua vez, atribuía aos números uma existência independente da realidade física e, claro, das mentes e cérebros dos seres humanos. O platonismo e as suas vertentes realistas sempre exerceram uma enorme atração em grande parte das pessoas desde a sua criação pelo sábio grego, e a sua influência não se restringe a matemáticos, físicos e cientistas profissionais, mas se estende a toda sociedade. Não é pequena a lista de grandes pensadores que eram realistas em um sentido ou outro, dentre os quais, destacamos Frege, Gödel² e Penrose - tendo este último uma orientação exageradamente platonista. Leibniz, entretanto, não era um seguidor de Platão, mas um racionalista convicto e grande admirador de Aristóteles. Em suas *Meditações sobre conhecimento, verdade e ideias*, ele faz as seguintes observações sobre o conhecimento simbólico:

No entanto, especialmente em uma análise mais ampla, nós não intuimos a natureza inteira das coisas de uma só vez, mas usamos signos em vez de coisas, embora, nós usualmente omitimos a explicação destes signos em nosso pensamento presente por uma questão de economia, sabendo ou acreditando que a possuímos. Assim, quando penso em um quiliôgono, um polígono de mil lados iguais, eu não considero sempre a natureza de um lado, ou da igualdade ou do milhar (ou o cubo de dez), mas uso estas palavras cujos significados parecem de modo obscuro e imperfeito à mente no lugar das ideias que tenho

² Gödel expõe de maneira clara o seu platonismo em um artigo sobre a hipótese do contínuo de Cantor (Gödel, 2006). Para uma análise do platonismo de Gödel e da disputa *Nominalismo X Platonismo*, recomendamos o capítulo quinto do livro de Chihara (2004), *A structural account of mathematics*; sobre Penrose, o matemático inglês exporá as suas convicções platonistas no primeiro capítulo *The road to reality* (Penrose, pp. 9-22, 2004). Finalmente, concernente à defesa do realismo, o melhor trabalho que conhecemos é *Logical forms* de Chateaubriand (2001 & 2005).

delas, porque me lembro de que conheço o significado das palavras, mesmo que a sua interpretação não seja necessária para o presente juízo. Costumo chamar tal tipo de pensamento de cego ou simbólico; nós o usamos na álgebra, aritmética e em quase toda parte. Quando um conceito é muito complexo, nós certamente não podemos pensá-lo simultaneamente através de todos os conceitos que o compõem (Leibniz, p. 292, 1989).

Vemos aqui que Leibniz tinha uma ideia clara da necessidade da utilização de símbolos para representar conceitos mais complexos através de outros conceitos mais simples. Leibniz foi, além de um matemático e filósofo brilhante, criador de notações e um grande entusiasta da matemática e da lógica a ponto de imaginar uma *Characteristica Universalis*, uma linguagem conceitual universal, ou nas palavras de Bertrand Russell (p. 169, 1949), uma *Matemática Universal*, i.e., em essência, uma *linguagem universal* dotada de um sistema de cálculo, um *Calculus ratiocinator*³. Ora, a constituição de uma linguagem matemática requer, necessariamente, a utilização de signos e, apesar de sua escolha ser arbitrária, ela pode contribuir para o seu desenvolvimento ou para a sua estagnação, um fato que ficará claro na seção referente às notações de Leibniz e de Newton.

Retornando a Russell, ele nos diz o seguinte sobre Leibniz: “Ele parece ter pensado que o método simbólico, no qual as regras formais evitam a necessidade do pensamento, poderiam produzir o mesmo

³ Leibniz não chegou a desenvolver uma lógica algébrica como o fez Boole, i.e., “(...) a única álgebra que Leibniz desenvolveu pode ser chamada de tentativas de um ‘cálculo lógico’ lidando com as relações de igualdade e inclusão, e o ‘cálculo geométrico’ lidando com o estudo direto de figuras e relações espaciais (Jourdain, p. 518, 1916)”. Além disso, o filósofo alemão estava preso à operação de *multiplicação lógica*, sendo que seria necessário acrescentar outras operações como a de negação e a de *soma lógica*, algo que encontraremos em Boole e nos tratados modernos de lógica algébrica. Curiosamente, o título de um texto clássico de Boole de 1854 envolve o termo “Leis do pensamento”, ou melhor, *Uma Investigação das leis do pensamento nas quais são definidas as teorias matemáticas da lógica e probabilidade*. Porém, foi em sua *Análise matemática da lógica* (*The mathematical analysis of logic*) escrita em 1847, que Boole estabeleceu a base para o tratamento algébrico da lógica. A respeito da lógica algébrica, recomendamos (Halmos, 1956). Observe que a primeira apresentação axiomática da lógica se deveu a Frege em seu clássico *Begriffsschrift*. Entretanto, além de Frege, quem mais se aproximou de algo similar a uma *Lingua Characteristica* foi Russell em seu monumental *Principia Mathematica* escrito com Whitehead.

resultado fecundo que produziu nas ciências de número e quantidade” (Idem, *Ibidem*). E a respeito da linguagem universal com o cálculo do pensamento, Russell nos brinda também com a seguinte citação do pensador alemão:

Se nós a tivéssemos, seríamos capazes de raciocinar na metafísica e na moral do mesmo modo que na geometria e na análise (...). Se controvérsias surgissem, não haveria mais necessidade de disputa entre dois filósofos do que entre dois contadores. Para isso, seria suficiente pegar os seus lápis em suas mãos, sentar-se à lousa e dizer um ao outro (com um amigo de testemunha, se preferissem): deixe que calculemos (Idem, pp. 169-170).

Leibniz imaginou⁴ possível a elaboração de um inventário de *todas as verdades universais básicas conhecidas pelos homens*, mais precisamente, um inventário do conhecimento humano, cujos conceitos primitivos seriam representados por signos de uma linguagem universal. Através de um cálculo do raciocínio - uma álgebra da lógica - estes símbolos seriam combinados - ver *On the General Characteristics* (Leibniz, 1989) & (Davis, Chap.1&9, 2000). Vemos aqui o grande entusiasmo de Leibniz com a matemática e a lógica e, em essência, como a sua filosofia foi fortemente influenciada por ela⁵.

1.2 Objetivos, linguagem e reflexão filosófica

Grande parte da história do desenvolvimento simbólico da matemática envolveu o modo que cada povo usou para denotar os

⁴ Leibniz também aprimorou a calculadora *La Pascaline*, invenção de Blaise Pascal. Não apenas Leibniz e Pascal, mas “Todos os homens, por natureza, desejam conhecer” - diria Aristóteles em sua *Metafísica* (Hankinson, p. 155, 2009). A busca pela compreensão do universo e os seus mecanismos é algo que faz parte da nossa natureza humana, sendo que o primeiro dispositivo de computação de que se tem notícia é a *Máquina de Anticítera* encontrada no fundo mar na Grécia e datada de 80 a. C. Recomendamos, a respeito da *Máquina de Anticítera*, o excelente texto de Alexander Jones (2017).

⁵ “A minha metafísica é totalmente matemática” foi o que Leibniz disse a L’Hospital em uma carta de Dezembro de 1694 - (Jourdain, p. 504, 1916). Ver também *The Influence of Mathematics on the Philosophy of Leibniz* (Moorman, pp. 131-140, 1944). Descartes foi outro pensador amplamente influenciado pela matemática na elaboração de sua filosofia (Moorman, pp. 296-307, 1943), todavia, não no mesmo sentido de Leibniz, cuja ênfase era dada à lógica.

numerais e as suas relações conhecidas. Não temos dúvidas ao afirmar que Cajori (1993) elaborou o trabalho mais detalhado e completo a respeito desse tema fascinante. No volume primeiro de seu livro *A history of mathematical notations*, os setenta e três primeiros parágrafos são dedicados à análise dos símbolos que inúmeras culturas e povos utilizaram para os numerais, dentre eles, os egípcios, sumérios, babilônios, chineses, peruanos, hebreus, gregos, romanos, maias, astecas, etc. Apesar da enorme importância do tema, qualquer discussão detalhada a seu respeito estaria completamente fora dos nossos propósitos. Entretanto, é importante ter em mente que, das notações simbólicas rudimentares para as relações aritméticas básicas ao surgimento da álgebra moderna, houve uma evolução espantosa rumo à abstração cada vez maior (Idem, §100-198). Ora, do grande matemático Diofanto, cuja notação simbólica era sincopada e destituída de qualquer dinâmica (Idem, §101-103), passando pelas inúmeras fontes árabes e hindus (Idem, §74-98) e pelos avanços notacionais de Iordanus Nemorarius e Leonardo de Pisa (Idem, §122), chegamos à famosa escola italiana de algebristas (Rafael Bombelli, Girolamo Cardano, etc.) e aos grandes matemáticos franceses François Viète e Descartes. Sem dúvida, um longo período⁶ histórico em que consideráveis avanços foram obtidos no sistema matemático de notações, além de um notável enriquecimento da linguagem matemática, a qual nem sempre foi muito bem vista por lógicos e matemáticos como Brouwer, (...) *que não tinha simpatia pela linguagem e também a via como uma vestimenta para o pensamento – uma vestimenta feia e de caimento ruim* (Chateaubriand, p. 15, 2007).

⁶ Citemos, também, os importantes trabalhos de Luca Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* de 1494, uma obra de grande influência e que serviu como referência para a posteridade (Cajori, §134-138, 1993) e William Oughtred que introduziu mais de cem signos notacionais, em geral, apropriados de outros autores que contribuíram para o enriquecimento da linguagem da matemática (Idem, §180).

Quanto a Brouwer⁷, é mais do que evidente que não flertamos com as suas posições filosóficas, apesar do intuicionismo em sua forma moderna, algo que Brouwer rejeitaria, nos brindar com uma linguagem lógica e matemática relevante e dotada de uma roupagem interessante. Para o matemático e filósofo holandês, não havia uma única verdade que a lógica produzisse num contexto simbólico-linguístico que não pudesse ser alcançada de outra maneira (e.g., de modo intuitivo). Então, se transferirmos este pensamento para o nosso caso das notações matemáticas, poder-se-ia pensar que elas são dispensáveis? Conforme já foi dito, sustentaremos a indispensabilidade da notação simbólica para a prática matemática, o que não deve ser confundido com afirmações do tipo: *não existe uma descoberta feita através de um raciocínio simbólico que não possa ser feita de algum outro modo*. Por *outro modo*, entendemos um insight ou intuição, analogia, processo computacional, etc. À primeira vista, pode parecer que a importância dada à sintaxe soe como um desprezo por qualquer outro aspecto filosófico da lógica e da matemática, porém, tal interpretação seria completamente enganosa, como ficará claro a seguir.

O modo que a descoberta matemática é feita, como as provas são articuladas e validadas e, mais fortemente, como a matemática e a realidade empírica se relacionam são temas que envolvem aspectos intrinsecamente epistemológicos e ontológicos para os quais acreditamos não haver substitutos linguísticos ou sintáticos. Considere o caso de uma demonstração⁸ matemática. Sundholm (p. 54, 1993), por exemplo, elenca

⁷ No âmbito da filosofia da matemática, a nossa orientação é estruturalista. Entretanto, dado que não discutiremos em profundidade o tema, deixaremos as seguintes referências ligadas a algumas correntes estruturalistas que nos influenciaram: (da Silva, 2017), (Chihara, 2004) e (Shapiro, 1997). Recomendamos também a análise de Hellman (2001) em *Three Varieties of Mathematical Structuralism*.

⁸ Recomendamos também o apêndice final deste trabalho para uma análise da resolução de problemas através de procedimentos computacionais.

doze teses a respeito do conceito de prova matemática, o que deixa explícita a necessidade de uma reflexão filosófica a respeito do tema. Tomemos também, a título de ilustração, a seguinte afirmação de Chateaubriand (p. 23, 2001) a respeito de um artigo de Martin-Löf (1987):

Martin-Löf, que também toma a lógica intuicionista como básica, conclui que a noção de validade de uma prova, correção de uma prova, deve ser uma noção absoluta (transcendental). Enquanto lógica do conhecimento, no seu sentido, a lógica intuicionista seria uma teoria ontológica da prova. Na minha visão, qualquer desenvolvimento das noções de prova e dedução deve ter um forte componente ontológico, mas eu vejo isso em termos de uma teoria clássica realista da verdade. Assim, eu enfatizo a lógica clássica ao invés da lógica intuicionista.

Ora, não há consenso a respeito do que é uma prova matemática e seria, no mínimo enganoso, eliminar a análise filosófica desse conceito em detrimento de caracterizações sintáticas, como se faz na lógica de primeira ordem. Neste caso, estaríamos apenas nos referindo ao conceito de dedução de uma sentença φ a partir de um conjunto finito de sentenças $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (Enderton, p. 103, 1972). Claro que há inúmeros tipos específicos de provas matemáticas, e.g., prova por indução, redução ao absurdo, provas construtivas, todavia, a investigação filosófica do conceito não se rende à enumeração de alguns exemplos elementares, assim como é impossível, ou melhor, absurdo, tentar eliminar a metafísica através da análise lógica da linguagem, como Carnap⁹ (1966) pensou. Façamos algumas considerações finais a respeito de lógica e linguagem.

O começo do século XX teve três grandes escolas de filosofia da matemática, o intuicionismo (Brouwer, Heyting, etc), o logicismo de Frege

⁹ O século XX foi uma fonte riquíssima de pensadores que se opuseram à metafísica de uma maneira, ou de outra, com os seus dogmas, idiosincrasias e máximas, e.g., “Lógica é, no jargão da mecânica, a resultante de duas componentes: gramática e verdade” Quine (p. 60, 1994).

e Russell e o formalismo de Hilbert – ver (Wilder, Chap. IX–XI, 1965). Observamos acima que Brouwer não foi um grande entusiasta da linguagem; já em Frege e Russell, o valor dado a ela é inegável, como fica óbvio em suas obras, respectivamente, *Begriffsschrift* e *Principia mathematica*. Finalmente, com relação ao formalismo, existe a propagação de um enorme mal entendido a respeito do programa de Hilbert. Não é incomum encontrarmos afirmações do tipo “Hilbert via a matemática como um jogo cego de sinais”, o que não é apenas uma mera simplificação do programa de Hilbert, mas um erro grosseiro. Shapiro, inclusive, comete este equívoco ao dizer que:

Esta filosofia sustenta que a matemática consiste de não mais do que a manipulação de caracteres de acordo com regras. Ou seja, as fórmulas da matemática são consideradas como cadeias de caracteres sem sentido, não símbolos genuínos (que simbolizem algo). Um teorema, digamos, da aritmética não representa um fato sobre os números naturais (...) tal teorema é o resultado de uma série de manipulações de acordo com as regras da aritmética (Shapiro, p. 528, 1983).

Uma leitura correta de como Hilbert entendia a matemática é resumida por Chateaubriand (p. 14, 2001):

Era um “jogo de fórmulas”, mas um jogo de fórmulas que expressava leis do pensamento refletidas na linguagem. O formalismo de Hilbert e a sua consolidação como uma filosofia da matemática foi uma influência importante no desenvolvimento inicial da concepção linguística da lógica.

O programa de Hilbert tinha como meta principal a obtenção de uma prova de consistência da matemática, mais especificamente, da aritmética dos números naturais, primeiramente. Entretanto, o grande matemático *não oferecia indicações muito precisas de quais métodos seriam aceitáveis*

para a demonstração da consistência da aritmética (da Silva, p. 193, 2007). Podemos dizer, sem dúvida, que Hilbert se opunha ao *idealismo* de Brouwer e acreditava fielmente numa prova de consistência, mas não cabe a leitura de que a matemática era considerada como um mero jogo vazio de sinais.

O papel das notações simbólicas e diagramáticas na matemática não será abordado em toda a sua profundidade filosófica, o que estaria totalmente fora dos propósitos do nosso livro. Quanto ao raciocínio diagramático, preparamos um apêndice sobre os diagramas de Feynman e a sua utilidade em mecânica quântica de campos. Segue, finalmente, de tudo que foi dito até agora, que não sustentamos que a realidade, ou algum de seus aspectos matemáticos, devam ser reduzidos à sintaxe, apesar de sua importância. De modo geral, acreditamos no mesmo que Husserl i.e., “(...) o uso de símbolos é mais do que um mero dispositivo auxiliar para o pensamento, que lançamos mão para, basicamente, auxiliar a nossa memória; de acordo com ele, eles fabricam a nossa vida psíquica, incluindo o próprio pensar (...)” (da Silva, p. 121 - 13^a nota, 2012).

Nota: na proposição 3.326 de seu *Tractatus*, Wittgenstein (1968) nos diz que: “Para reconhecer o símbolo no signo, deve-se atentar para o seu uso significativo”. Paraphraseando Wittgenstein e tecnicamente falando, os termos *signo* e *símbolo* são usados de modos distintos pelos linguistas e o correto seria utilizar *signo* em determinados contextos, como no da extensão de teorias matemáticas, ou de modo mais geral, no caso de um *jogo simbólico* guiado por regras sintáticas. Todavia, para os nossos propósitos práticos, utilizaremos tais termos como intercambiáveis, o que é um claro abuso da linguagem por nossa parte, entretanto, que julgamos perdoável. Uma última observação: todas as traduções das citações que - evidentemente, já não estavam em Português - foram feitas pelos autores.

Tipos de notação

De Ahmes, o escriba egípcio que copiou em hierático o texto matemático mais antigo de que se tem conhecimento, aos tratados modernos de álgebra, a notação matemática esteve presente de um modo ou de outro. No papiro de Ahmes (ou de Rhind), por exemplo, há algumas notações diagramáticas para triângulos (Eves, pp. 69-70&74, 2008). O demótico e o hieróglifo são outras escritas egípcias antigas e, nesta última, a base numérica é a de 10. Nela, os numerais $1, 10^1, \dots, 10^4, 10^5, 10^6$ são representados por desenhos, respectivamente, um bastão vertical, uma ferradura, um rolo de pergaminho, uma flor de lótus, um dedo encurvado, um girino e um homem espantado (Idem, p. 31), ou seja,



Não seria inteligente escrever um tratado moderno de teoria dos números com esses belos caracteres por alguns motivos óbvios, dentre eles:

- i. a matemática moderna é uma teoria de estruturas e não de objetos particulares como números, sejam eles representados por flores de lótus, anfíbios ou algarismos hindu-arábicos;
- ii. heurística: uma boa notação permite a manipulação simbólica sem entraves, o que não seria o caso com belos desenhos de girinos, flores e homens espantados;
- iii. economia de espaço.

Dos matemáticos egípcios a Russell e Whitehead, avanços monumentais foram obtidos em lógica, geometria, análise, teoria dos conjuntos, álgebra, etc., sendo que a notação matemática também passou por inúmeras mudanças e aperfeiçoamentos. Entretanto, trabalhos seminais nem sempre são os melhores exemplos que devemos tomar para ilustrar um bom aparato notacional, dado o fato óbvio de servirem de base para desenvolvimentos futuros. Tomemos a segunda edição do *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead, à qual foi adicionada uma introdução de mais de trinta páginas em que se discute (Russell & Whitehead, pp. XIII–XLVI, 1973), dentre inúmeros tópicos relevantes, a notação, sendo dada uma atenção especial às simplificações que podem ser obtidas pela introdução do símbolo *stroke* - ou *conectivo de Sheffer* (1913). A maquinaria notacional do *Principia* recebeu, inclusive, um verbete na Enciclopédia de Filosofia de Stanford¹, i.e, *The Notation in Principia Mathematica*, o qual está dividido em quinze partes e que consideramos propedêutico ao estudo do trabalho de Russell e Whitehead.

Apesar de suas preocupações com a notação, Russell e Whitehead não foram os lógicos detentores do sistema notacional mais intuitivo e dinâmico do século passado. Tomemos, a título de exemplificação, a proposição *54.43 do *Principia* (Idem, p. 360), cuja importância está relacionada à prova de que $1 + 1 = 2$

¹ <https://plato.stanford.edu/entries/pm-notation/#Clas>

*Figura retirada de: https://pt.wikipedia.org/wiki/Principia_Mathematica

*54.43. $\vdash \therefore \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$$\begin{aligned} \vdash . *54.26. \supset \vdash \therefore \alpha = t^t x. \beta = t^t y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. &\equiv . x \neq y. \\ [*51.231] &\equiv . t^t x \cap t^t y = \Lambda. \\ [*13.12] &\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1) \\ \vdash . (1). *11.11.35. \supset \\ \vdash \therefore (\exists x, y). \alpha = t^t x. \beta = t^t y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. &\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2) \\ \vdash . (2). *11.54. *52.1. \supset \vdash . \text{Prop} \end{aligned}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Para o leitor desconhecedor da notação do *Principia*, não acreditamos ser óbvio que a proposição *54.43 pareça ter uma relação imediata com a demonstração de $1 + 1 = 2$. Claro que, após o estudo do aparato notacional do *Principia* e de algumas outras proposições básicas, o leitor se sentirá à vontade com a proposição acima. Como veremos, é mister elaborar sistemas notacionais que expressem os conceitos de maneira clara, precisa e sucinta. A notação de Russell foi empregada durante algum tempo, mesmo que de maneira modificada, por alguns lógicos e filósofos como Carnap no seu livro de lógica simbólica de 1954. Nele, o pensador utilizou parênteses em vez de pontos, dentre outras modificações (Carnap, pp. 1-9, 1958).

O filósofo alemão Immanuel Kant foi outro eminente pensador que tinha apreço pelo pensamento simbólico, o que fica claro na seguinte citação: “Assim como a geometria o consegue por intermédio de construção ostensiva ou geométrica (dos próprios objetos), através de uma construção simbólica a matemática atinge paisagens jamais acessíveis ao conhecimento discursivo mediante simples conceitos” (Kant, pp. 432–433, 1999). Para Kant, havia dois tipos de construções matemáticas, as *geométricas* (também chamadas de *ostensivas*) e as *algébricas*, às quais ele se referia pelo termo *simbólicas*. De modo genérico, dividiremos os tipos de notações matemáticas em duas classes, sendo elas, a *classe das notações*

simbólicas e a *classe das notações diagramáticas*². É óbvio que elementos de ambas as classes podem ocorrer em um mesmo problema, o que nos permitiria dizer que há uma terceira classe, a das *notações mistas*. Seria plausível dizer que notações são sempre simbólicas e que diagramas ou desenhos não devem ser entendidos como um tipo especial de notação, todavia, optamos por colocá-los em uma classe específica, dado o seu papel na resolução de problemas. Para cada problema matemático, é amplamente arbitrária a escolha da notação e, curiosamente, Frege (pp. 229-230, 1984) nos diz que: “Quando escrevo $1 + 2 = 3$, estou colocando uma proposição sobre os números 1, 2 e 3, mas não é desses símbolos que estou falando. Eu poderia substituí-los por A, B ou Γ ; eu poderia escrever p em vez de $+$ e e em vez de $=$. Escrevendo $ApB\epsilon r$, então, eu expressaria o mesmo pensamento anterior – mas através de símbolos diferentes”.

Apesar da escolha do tipo de notação³ ser arbitrária, o que importa é a sua indispensabilidade. Frege está certo quanto à expressão $1 + 2 = 3$ poder ser representada por $ApB\epsilon r$, assim como os romanos não estavam errados em representar os números de modo obtuso, o que só serviu de entrave ao desenvolvimento de sua matemática. A título de exemplificação, tome o algoritmo da multiplicação de números inteiros escritos na notação decimal, o qual permite a geração indefinida de números e o *vislumbre com o infinito potencial*. Agora, imagine o que seria a multiplicação de *números grandes* na notação romana ou de acordo com uma simbologia obtusa do tipo $ApB\epsilon r$.

² Sobre diagramas lógicos e os aspectos gerais do raciocínio diagramático, recomendamos (Legg, pp. 1-18, 2010).

³ Em um sentido mais amplo, poderíamos inserir a notação e o tipo de símbolos usados por cada cientista no contexto de uma *filosofia do estilo*, algo que estaria fora dos nossos propósitos. Entretanto, recomendamos o ensaio de Granger (1988*) sobre o tema. Durante o nosso texto, citaremos outro livro de Granger também de 1988, daí o sinal de asterisco para não haver ambiguidade a respeito do texto que estamos citando.

Concernente às notações diagramáticas, mais especificamente, ao uso de figuras como elementos auxiliares ao pensamento, Platão⁴ nos diz o seguinte no sexto livro da República:

Então, deves saber também que embora utilizem figuras visíveis e façam afirmações acerca delas, seu pensamento não se dirige a elas, mas àquelas outras coisas às quais se assemelharam. Fazem suas afirmações relativamente à diagonal que traçam, e analogamente com as demais. Essas figuras que eles produzem e traçam, das quais sombras e reflexos na água são imagens, eles agora utilizam, por sua vez, como imagens procurando obter uma visão daquelas realidades que só podem ser vistas pelo intelecto (Platão, p. 305, 2006).

Ainda nesta direção, tomemos o caso das figuras nos *Elementos* de Euclides. Para alguns historiadores, elas funcionam como verdadeiros pontos de apoio nas demonstrações - ver (Bicudo, pp. 211-213, 2007). Podemos afirmar que, quando Euclides ou algum geômetra diz *seja o triângulo ABC*, ele está utilizando um triângulo específico como uma notação diagramática para o caso de um objeto triangular genérico. No caso da geometria de Euclides, Hilbert deu a ela uma formulação puramente axiomática sem referência a objetos específicos, sejam eles triângulos, retas ou círculos. Note que os *Elementos* de Euclides foram escritos cerca de 2200 anos antes do trabalho de Hilbert⁵ e que o fato dos desenhos serem desnecessários à geometria euclidiana não tiram o seu papel heurístico. Evidentemente, Hilbert deu uma forma rebuscada e lógica a algo que já dominava de modo pleno, uma disciplina cujos

⁴ Acerca do que é dito por Platão, resta explicar o porquê de uma demonstração que, *a priori*, se apoia em uma figura específica, poder se aplicar a qualquer outra do mesmo tipo. É costume dizer que o caráter genérico e abstrato das construções que se apoiam apenas em propriedades comuns a todas as figuras de certo tipo justifica a generalização da demonstração para todas as figuras de mesma natureza. Em essência, isso está correto, porém, deixamos - a título de referência - uma justificação empirista para a abstração (da Silva, pp. 56-64, 2007).

⁵ Lagrange, por sua vez, escreveu que *nenhuma figura será encontrada neste trabalho* no prefácio à primeira edição de seu monumental *Mécanique analytique*, cujo primeiro volume data de 1788.

conceitos eram claros e distintos à sua mente. Apenas para o caso das notações não diagramáticas é que sustentaremos a sua indispensabilidade à prática matemática.

Um exemplo famoso do uso de notação diagramática nos remete à história de que Gauss, quando criança, teria descoberto a fórmula para a soma dos n -primeiros números naturais durante uma aula de matemática. Não importa se a história é real, mas suponha que queiramos somar $1 + 2 + 3 \dots + n = S_n$. Escrevamos:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \dots & n-1 & n & & \\ & & & n & n-1 & 2 & 1 \end{array}$$

Olhando para as colunas acima, é imediato que $S_n = \frac{n}{2}(n+1)$, visto $n(n+1)$ ser igual ao dobro de S_n - não importando se n é par ou ímpar. Tal expressão pode ser demonstrada trivialmente por indução finita, todavia, o diagrama acima ajuda bastante na sua compreensão e obtenção. Gauss, de sua parte, teria escrito o seguinte: $1 + 2 + \dots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.

Abordagens com o uso de diagramas parecem não ser tão rigorosas quanto às de natureza puramente algébrica por se apoiarem em objetos da intuição geométrica, porém, para René Thom, *tudo o que é rigoroso é insignificante* (Granger, p. 68, 1988). Note que o rigor é algo relativo a uma época e tende a se modificar com a formalização dos resultados e axiomatização das teorias. Ora, os *Elementos* de Euclides poderiam ser considerados satisfatórios para os padrões de rigor de 300 a.C. Observe, também, que a descoberta matemática é, muitas vezes, feita de modo intuitivo, através de analogias, diagramas e de manipulação simbólica. Tomando emprestadas as palavras do brilhante⁶ físico-matemático Oliver Heaviside, *Nós trabalhamos por instinto, não segundo regras rigorosas*

⁶ Indicamos também um belo texto de Poincaré sobre a descoberta matemática (pp. 294-304, 1963).

(Granger, p. 114, 2002). Ainda com relação ao rigor, não podemos confundir o rigor exigido em uma demonstração ou exposição de um conteúdo com a maneira pela qual um cientista chega a uma descoberta. É bem plausível que Thom não esteja se referindo ao modo que os matemáticos justificam as suas teorias, mas como as criam. Finalmente, na mesma direção, porém, no contexto da inteligência artificial, Turing (p. 123, 1947) nos diz: “(...) se esperamos que uma máquina seja infalível, não poderá ser também inteligente. Existem vários teoremas que exprimem quase exatamente isso. Mas estes teoremas nada dizem sobre o grau de inteligência revelado se uma máquina não tiver pretensões de infalibilidade”. Bem, se os matemáticos trabalhassem como máquinas infalíveis, é certo que não passariam pelo crivo dos teoremas citados por Turing (como os da incompletude de Gödel).

Funções básicas da notação matemática

3.1 Preâmbulo filosófico

Creio sobretudo que minha conceitografia seja ampliada com sucesso, onde tiver especial importância a exatidão de uma prova, como nos fundamentos do cálculo diferencial e do cálculo integral. Parece-me ainda mais fácil estender o domínio [de aplicação] desta linguagem formular à geometria. Para tanto, basta acrescentar [à linguagem formular] mais alguns símbolos para as relações intuitivas que aí [na geometria] ocorrem. Deste modo, obter-se-ia uma espécie de *analysis situs* (Frege, p. 19, 2018).

Com foi dito anteriormente, faz parte do nosso objetivo a refutação da tese *de a notação ser artificial e de desempenhar apenas um papel auxiliar*. Para isso, discutiremos a importância das notações matemáticas através de quatro de seus aspectos fundamentais, os quais estão relacionados entre si de uma maneira ou de outra. Porém, antes, elaboraremos algumas notas concernentes à justificação de uma conceitografia seguindo Frege de perto. Apesar do lógico e filósofo alemão ter em mente outros objetivos, como o da redução da aritmética à lógica-ver (da Silva, Cap. 3, 2007) - as suas observações também se aplicarão ao nosso trabalho diretamente. Com relação à sua conceitografia, o filósofo afirma que “Eu desejei produzir não um mero *calculus ratiocinator*, mas uma *língua característica* no sentido leibniziano” (Frege, p. 91, 1972). Ou seja, ele acreditava que a linguagem lógica podia ter utilidade em outras áreas, como acreditava Leibniz a respeito de seu projeto de uma *matemática universal*.

Frege foi um pensador de fina e rara erudição que nos brindou com grandes obras filosóficas, como as suas *Investigações lógicas*, além de elaborar a primeira axiomática da lógica em seu *Begriffsschrift* de 1879 - *conceitografia* (Frege, 2018). Em sua *Justificação científica de uma conceitografia*, ele nos diz que:

Sem sinais, também, dificilmente nos elevaríamos ao pensamento conceitual. Atribuindo o mesmo sinal a coisas semelhantes, designamos não propriamente a coisa singular, mas o que lhes é comum, o conceito. E apenas obtemos este conceito designando-o; pois sendo em si mesmo não intuitivo, carece de um representante intuitivo a fim de poder aparecer-nos. Assim o sensível descortina para nós o mundo do que não é sensível. Não se esgotam os méritos dos sinais. Isto basta, entretanto, para mostrar que são indispensáveis (Frege, pp. 195-196, 1974).

Tal citação é de uma precisão e clareza iluminadoras e nos será útil para entender o porquê de um objeto matemático, para o qual utilizamos um símbolo, não se referir a uma entidade específica, mas a toda uma classe de objetos. Por exemplo, veremos que um tensor não é um ente matemático definido apenas por suas componentes em um sistema fixo de referência, mas pela classe de todos os objetos que satisfazem a determinadas regras de transformação. A ideia é a mesma daquela apresentada na citação acima e que, colocada na linguagem de Russell, pode ser exemplificada pelo modo de se definir o número dois como a classe dos pares, ou se preferir, o três, ou qualquer outro número do seguinte modo:

Um número não é idêntico a qualquer coleção de termos que o contenha: o número 3 não é idêntico ao trio consistindo de Brown, Jones e Robinson. O número 3 é algo que todos os trios têm em comum e que os distingue de outras coleções. Um número é algo que caracteriza certas coleções, isto é, aquelas que têm aquele número (Russell, p. 18, 1981).

A linguagem natural, além de ambígua, não satisfaz ao critério de univocidade, i.e., de *uma mesma palavra designar um conceito ou um objeto que cai sob ele*, como nota Frege (p. 196, 1974); além disso, “A linguagem não é regida por leis lógicas, de modo que a obediência à gramática já garantisse a correção formal do curso do pensamento. As formas em que se exprime a dedução são tão várias, tão frouxas (...)” (Idem, Ibidem). Frege resume bem algumas das deficiências das linguagens naturais. Feynman, por sua vez, creditaria à matemática um poder superior ao das linguagens naturais por ser dotada de uma lógica subjacente, ou seja, *A matemática é uma linguagem mais raciocínio; é como uma linguagem mais lógica. A matemática é uma ferramenta para o raciocínio* (Feynman, p. 40, 1992). Embora seja bastante simplificada a *definição* de matemática que o físico americano apresenta, ele não está errado na essência de seu pensamento. Podemos dar ao pensamento de Feynman uma forma mais precisa: a linguagem matemática é rígida e precisa, os seus objetos são articulados através de regras lógicas que, fixado o contexto, são imutáveis.

3.2 Aspectos fundamentais da notação

Quanto aos aspectos fundamentais da notação, separamos quatro, sendo eles:

- i. Precisão e concisão na expressão do problema: eliminação da ambiguidade e economia de pensamento, respectivamente;
- ii. Possibilidade de extensão de uma teoria;
- iii. Heurística: solução de problemas;
- iv. Explicitação de estruturas.

i. Precisão e concisão

Nós, seres humanos, temos o hábito desleixado, se não totalmente mau, de atribuir avanços a alguns "grandes homens". Chamo esse hábito de síndrome de Pitágoras, devido à tendência, no mundo ocidental, de se atribuir todos os avanços na matemática anteriores ao século V a.C. a Pitágoras sem levar em consideração as suas origens reais. Ao avaliar as contribuições de Turing, devemos ter cuidado para não sermos vítimas da síndrome de Pitágoras (...)
(Lloyd, p. 570, 2012).

Apesar de ninguém ter atribuído toda a matemática anterior ao século V a.C. a Pitágoras, Seth Lloyd está certo ao se referir à nossa tendência de atribuir a uma, ou poucas pessoas, um feito coletivo que, muitas vezes, levou séculos até à sua conclusão. É comum dizer que Leibniz e Newton criaram o cálculo diferencial e integral e, assim, acabamos sendo injustos com todos os seus predecessores, dentre eles, René Descartes, Bonaventura Cavalieri, Johannes Kepler, Blaise Pascal, Pierre de Fermat e o grande gênio Arquimedes. O desenvolvimento histórico do cálculo diferencial e integral se iniciou com o cálculo de áreas, comprimento de arcos e volumes, uma sequência distinta daquela adotada por grande parte dos livros didáticos modernos, salvo algumas exceções como (Apostol, 1961). Entretanto, é compreensível que o cálculo diferencial seja apresentado antes do integral por ser mais intuitivo e simples.

Ainda com relação a Seth Lloyd, talvez, por questões práticas, sejamos também um pouco desleixados ao omitir o trabalho de grandes pensadores. Leibniz, por exemplo, não introduziu o signo $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ para denotar as derivadas parciais de uma função de $y = f(x_1, \dots, x_n)$ e, inclusive, em uma carta endereçada a L'Hospital (Cajori, §593, 1993), o matemático alemão escreveu δm para a derivada parcial de uma função

$m(x, y)$ com relação a x e ∂m para a sua derivada parcial com relação a y . O símbolo moderno $\frac{\partial y}{\partial x}$ foi utilizado pela primeira vez por Legendre¹ em um artigo de 1786 (Idem, §596), todavia, a sua utilização só se difundiu cerca de cinquenta anos após os trabalhos de Jacobi de 1841, que escreveu $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ para a diferencial total de uma função $f(x, y)$ em *De determinantibus functionalibus*. Nesta mesma obra, o matemático alemão denotou por $\int f(x, y) dx$ a integral de uma função de duas variáveis em que $y = g(x)$ e, $\int f(x, y) \partial x$, para o caso de se considerar y constante durante a integração em x (Cajori, pp. 30-31, 1923). Esta última notação não teve aceitação e jaz no vasto cemitério dos signos do cálculo integral. Parte da dificuldade ligada à obtenção de um sistema estável de signos para o cálculo diferencial de várias variáveis se deveu à possibilidade de uma variável (ou várias variáveis) poder(em) ser definida(s) de modo implícito em uma vasta variedade de exemplos, e.g., $f(x, y, z)$ com $z = u(x, y)$. Por existirem inúmeros casos mais complexos ligados a funções implícitas, recomendamos (Krantz & Parks, 2003) para uma análise histórica e conceitual do famoso *teorema da função implícita*.

Feitas essas observações, está claro que abusaremos da linguagem ao dizer *notação de Leibniz*, visto o aparato notacional do cálculo ter levado mais de dois séculos para se estabilizar e adquirir uma roupagem próxima

¹ “Para evitar qualquer ambigüidade, representarei por $\frac{\partial v}{\partial x}$ o coeficiente de dx (...)” - Legendre (Cajori, p. 20, 1923). A notação de Legendre não foi aceita de imediato, sendo que ele mesmo a abandonou em artigos posteriores. Lembremo-nos de que havia uma plêiade de notações competidoras nos séculos XVIII, em especial, na França, fato que se estenderia ao século XIX. A figura central da matemática francesa no fim do século XVIII era o grande Lagrange. O matemático francês utilizou inúmeros tipos de notações, dentre eles, $f'(x, y)$ e $f''(x, y)$ para as derivadas parciais de primeira e segunda ordem, respectivamente, de uma função $f(x, y)$ com relação a x - já para as derivadas parciais de primeira e segunda ordens de $f(x, y)$ com relação a y - Lagrange usou, respectivamente, $f_1(x, y)$ e $f_{11}(x, y)$. Reescrevendo na nossa notação atual, teríamos, e.g., $f'_{11}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2 \partial x}$. Note que existe uma ambigüidade a respeito da ordem em que as derivadas são tomadas, e.g., $f'_1(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ou $f''_1(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (Idem, p. 23). Claro que, para funções de mais variáveis, este simbolismo não é adequado, o que levou Lagrange a introduzir outro tipo de notação (Idem, Ibidem). Para três variáveis, bastaria escrever: $f_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$. Autores de livros modernos de equações diferenciais parciais trabalham com o conceito de operadores diferenciais e seguem inovando nas notações. Folland (p. 3, 1995) escreve: $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e $\partial^\alpha = \prod_1^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, para $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geq 0$.

daquela do século XX. Ora, ainda em 1902, Thomas Muir² escrevera um artigo em que explicaria a sua notação na revista *Nature*. Muir substituiu o signo funcional $\Phi(x, y, z)$ por $\Phi\overline{x, y, z}$ e utilizou $\Phi\frac{124}{xyz}$ para denotar *uma derivação com relação a x, duas com relação a y e quatro com relação a z* (Cajori, p. 34, 1923). Outro exemplo de notação pitoresca foi oferecido pelo grande Newton ao escrever $\frac{aa}{64x}$ para uma integral em x , i.e., para $\int \frac{aa}{64x} dx$ (Idem, p. 37). Quanto ao símbolo para a integral definida, foi Fourier quem nos brindou com a sua forma clássica $\int_a^b f(x) dx$ e, finalmente, coube a Sarrus a utilização do signo $!_a^b F(x)$ - ou $F(x)!_a^b$ - sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ (Idem, p. 40).

Grande parte das notações desenvolvidas - como as de Muir para as derivadas parciais e de Newton para a integral - jazem no esquecimento. Como dissemos, não é possível citar todos os nomes envolvidos no aperfeiçoamento da simbologia do cálculo diferencial e integral. A título de referências, quanto a Newton e Leibniz, ver, respectivamente, (Cajori, §567-569, 1993) & (Idem, §570-572). Para uma análise minuciosa e bastante detalhada do desenvolvimento da notação do cálculo diferencial ao cálculo avançado, recomendamos os parágrafos (Idem, §566-610); e finalmente, para os *inventariantes de signos*, Cajori elaborou uma família de tabelas com todos os símbolos utilizados por Leibniz em toda a sua obra nos parágrafos §542-565.

Referente ao cálculo diferencial de uma única variável, seja o caso das notações de Newton e Leibniz, respectivamente, para a derivada de $h(t) = f_1(t) + f_2(t)$:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{df_1}{dt} + \frac{df_2}{dt}$$

² "Os símbolos de Dr. Muir podem ser muito adequados para manuscritos ou para o quadro negro, mas o custo de impressão seria excessivo" - Basset (Cajori, p. 35, 1923).

$$\dot{h}(t) = \dot{f}_1(t) + \dot{f}_2(t)$$

Ambas as notações são precisas, concisas e *têm o seu charme* e estética próprios. Mas é importante notar que estamos assumindo implicitamente inúmeras definições, propriedades e teoremas elementares do cálculo diferencial, e.g., que a *derivada da adição de funções é a adição das suas derivadas* - ver (Rudin, Chap.5&9, 1976). E não estamos seguindo a notação de Newton exatamente como ele a utilizou, mas adaptações modernas. Por exemplo, em sua derivação da braquistócrona, o matemático inglês escreveu:

“*Fluxion* $\frac{\dot{y}}{x^2\dot{s}} = 0$, dont la Fluente est $\frac{\dot{y}}{x^2\dot{s}} = \frac{1}{a^2}$ que l'on trouvera être l'équation de la cycloïde” (Cajori, p. 2, 1923).

Veremos, a seguir, que a notação de Newton começa a se tornar problemática quando se visa estendê-la ao cálculo de várias variáveis.

ii. Possibilidade de extensão a outros problemas

Relacionado ao problema da extensão de um domínio de objetos sujeitos a determinadas operações a outro *maior ou mais rico*, foram dadas justificações filosóficas por alguns filósofos como Husserl - sendo, inclusive, tal problema uma das preocupações do filósofo alemão, como da Silva nos diz:

Uma das formas que o problema do conhecimento simbólico toma na filosofia de Husserl é o seguinte: dado um domínio de objetos regrados por um conceito (i.e., o domínio constitui a extensão do conceito), em quais circunstâncias nos é permitido estender este domínio adicionando novos objetos formais (objetos que não caem sob o conceito governando o domínio e que são apenas formalmente caracterizados) de modo a lidar melhor com problemas envolvendo apenas os objetos originais? (da Silva, pp. 117-118, 2012).

Com relação ao problema acima, Granger também o abordará partindo do fato da existência de objetos matemáticos ser sempre relativa à existência de um conjunto de operações, de modo que o objeto e a operação se mantenham solidários uns dos outros por um conceito de dualidade (Granger, pp. 261-265, 2007). Neste caso, estendendo as operações a novos domínios, os objetos serão também estendidos a ele de modo imediato. Nas palavras de Granger, (p. 63, 1993): “É o que gostaríamos de justificar, interpretando a criação matemática como instituindo uma correlação entre os objetos que ela suscita e o sistema de operações que ela organiza”. O conceito de dualidade a que Granger se refere foi inspirado, em parte, no trabalho do matemático Gergonne em geometria descritiva e no artigo *Sobre a lógica e a teoria da ciência* de Jean Cavailles (Cap.3, 2012). Com relação a este último, Granger utiliza a seguinte citação: “Não há formalismo sem sintaxe, sintaxe sem um outro formalismo que o desenvolva” (Granger, p. 81, 1988). Husserl (da Silva, p. 121, 2012) também tinha clara a questão da relação entre os signos que representam números e os sistemas de operações em que se apoiam, além de sua abordagem ser mais precisa, intuitiva e elegante do que aquela apresentada pelo filósofo francês em seus trabalhos citados até aqui. Abordaremos esta questão um pouco melhor na seção quarta do nosso livro.

Retomando o caso elementar do final da subseção anterior, não parece haver a menor diferença entre o papel exercido pelas notações de Leibniz ou de Newton³. Porém, tome uma função diferenciável de várias

³ Os trabalhos de Newton e Leibniz não foram aceitos em sua plenitude e de imediato por toda comunidade de filósofos. Berkeley escreveu uma análise crítica direcionada ao trabalho de Newton e que se encerra com 67 questões, em grande medida, pertinentes (Berkeley, pp. 60-92, 1999). O ponto chave é que, antes da aritmetização da análise, havia inúmeros problemas ligados à sistematização do cálculo diferencial e integral; logo, críticas como as de Berkeley acabaram sendo importantes para a construção de bases mais sólidas para a matemática.

variáveis $y = h(t_1, t_2, \dots, t_n)$. A diferencial total de y se escreve da seguinte maneira na notação de Leibniz (Kaplan, p. 100, 1975):

$$dy = \frac{\partial h}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial h}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial h}{\partial t_n} \Delta t_n$$

A notação de Newton não discrimina as variáveis e só é útil para funções de uma única variável e, assim, simplesmente obstrui o desenvolvimento do cálculo diferencial de várias variáveis. Neste caso, é uma questão de limitações referentes à notação do gênio inglês. Mesmo para uma única variável, seja a n -ésima derivada de uma função $h(t)$. Para $n = 3$, teríamos o seguinte na notação de Leibniz, $\frac{d^3 h}{dt^3}(t)$. Na notação de Newton, acrescentaríamos três pontos sobre a letra h , i.e., $\ddot{h}(t)$. Para a n -ésima derivada, a notação de Leibniz permite uma generalização imediata, $\frac{d^n h}{dt^n}(t)$, enquanto a notação de Newton só traria confusão, visto termos que escrever algo do tipo: “... - n vezes” ou alguma variação sintática⁴, e.g., $h^{(n)}$ para n símbolos do tipo “ ’ ”. Para o cálculo diferencial de várias variáveis, o poder da notação de Leibniz fica explícito em exemplos simples como:

Tome $z = f(x, y)$, sendo $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ e suponha que todas as funções são de classe C^2 . Podemos provar que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

⁴ Como se vê nestas notas, Lagrange foi uma espécie de *camaleão das notações*. O grande matemático havia utilizado a notação $f'(x), f''(x), f'''(x) \dots$ etc. em sua *Théorie des fonctions analytiques* de 1797; todavia, foi François Daviet Foncenex quem introduziu tais signos em 1759 (Cajori, p. 6, 1923). Curiosamente, em suas *Leçons sur le calcul des fonctions*, Lagrange utilizou a notação de Newton (*dérivées par rapport à i*), fato que também ocorreu na segunda edição da sua obra prima *Mécanique analytique*, mas para indicar derivadas temporais (Idem, pp. 11-12). Em sua *Résolution des équations numériques*, insatisfeito com os signos utilizados nas obras anteriores a 1798, e.g., *Théorie des fonctions analytiques*, introduziu outros símbolos (Idem, p. 24).

E não há nada de sofisticado neste exemplo, tudo o que segue é o resultado de duas aplicações diretas e consecutivas da regra da cadeia do cálculo de funções de várias variáveis à função $z = f(x, y)$, o que é feito de modo puramente mecânico.

Newton tinha em mente derivadas tomadas com relação ao tempo, as quais podem ser representadas de modo adequado através de sua notação, caso nos restrinjamos a funções de uma única variável e a derivadas de *ordens* pequenas. Também é importante notar que, para a sua física, as derivadas de ordem $n > 2$ não eram tão importantes. Ambas as notações de Leibniz e Newton são precisas e concisas, mas a segunda⁵ é muito mais limitada e não permite que seja estendida naturalmente para o caso de funções de várias variáveis, mesmo para os casos mais simples como o de $y = h(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Poderíamos ter funções de funções de funções, etc, tipo $y = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ou casos de infinitas variáveis, dentre inúmeras outras possibilidades mais complicadas. Além da notação de Leibniz poder ser estendida de modo simples e natural a casos novos, ela sugere algumas questões interessantes como a de os símbolos $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ se referirem a um mesmo objeto matemático ou não. Demonstra-se, pelo teorema de Schwarz, que tais derivadas de segunda ordem coincidem sob condições razoáveis (Lima, p. 147, 2000).

No mesmo sentido da notação *apontar* para novas direções de pesquisa, tome o caso de George Peacock (Cajori, p. 15, 1923) que foi levado a considerar derivadas de ordens fracionárias do tipo $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}$ partir de:

$$\frac{d^n(e^{mx})}{dx} = m^n e^{mx}$$

⁵ Uma comparação crítica justa do poder das notações escrita no começo do século XIX se deveu ao inglês Robert Woodhouse da universidade de Cambridge, o qual optou sem hesitação pela notação de Leibniz (Cajori, p. 8, 1923).

Tal especulação não levou a resultados efetivos imediatos, *mas ilustra como uma notação adequada é capaz de sugerir generalizações que não seriam prontamente sugeridas por uma exposição retórica* (Idem, Ibidem). Entretanto, o cálculo diferencial com derivadas fracionárias não é mais novidade e encontra aplicações à física de polímeros, e.g. (Schuessel & Friedrich & Blumen, pp. 331-376, 2000), à teoria das equações diferenciais (Oldham & Spanier, Chap.10, 1974) e a problemas de difusão (Idem, Chap.11), dentre inúmeros outros. Historicamente, Leibniz (1695) foi a primeira pessoa a se referir a derivadas fracionárias em uma carta a L'Hospital em 1695, e Heaviside foi o primeiro a utilizá-las em seus trabalhos sobre o eletromagnetismo e análise harmônica no final do século XIX, i.e., “Seja Δ um diferenciador, digamos, com respeito a x , então, temos considerado não apenas Δ^{-n} quando n é um número inteiro, mas também quando é fracionário, seja $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ ” (Heaviside, p. 435, 1971). Tomemos mais um exemplo.

Seja a equação diferencial parcial, escrita por Fourier (Cajori, p. 16, 1993) da seguinte maneira:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 2 \frac{d^4 v}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 v}{dy^4}$$

Sob suposições plausíveis a respeito de $v(x, y)$, podemos escrever a seguinte expressão:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)^2 v = \frac{d^4 v}{dx^4} + 2 \frac{d^4 v}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 v}{dy^4}$$

que nos remete imediatamente a $(x^2 + y^2)^2$, assumindo que:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)$$

Antes de terminarmos esta seção, vejamos uma nota de Lacroix sobre as notações de Newton e Leibniz:

Euler enfatiza (...) os defeitos da notação inglesa, que se torna difícil de escrever e também de perceber quando o número de pontos excede três, e não se vê como é possível indicá-lo em figuras sem o risco de confusão com expoentes; além disso, nós sabemos que é fácil omitir um ponto ao escrever ou que aquele ponto pode não aparecer na impressão (...). O uso do d não está sujeito a essas dificuldades; este sinal é mais conspícuo, especialmente se, considerando como um sinal de operação (...)" (Idem, p. 10).

A propósito, o que Euler disse foi o seguinte:

Este modo de simbolizar, para falar a verdade, não pode ser desaprovado quando o número de pontos é pequeno, desde que pode ser reconhecido instantaneamente por contagem; entretanto, se muitos pontos devem ser escritos, ele leva a uma enorme confusão e muitas inconveniências. A décima diferencial ou fluxão é representada desta maneira excessivamente inconveniente por $\overset{\cdot\cdot\cdot}{y}$, enquanto que o nosso modo de simbolizar, $d^{10}y$, é quase imediatamente reconhecível (Idem, *Ibidem*).

Lagrange⁶ foi, sem dúvida, o grande camaleão das notações para as derivadas, e de acordo com Thomson e Tait, *combinou as duas notações com admirável habilidade e gosto* (Idem, p. 12). Encerremos, finalmente, esta seção com a famosa equação de Lagrange que serve como ilustração e ponto de apoio para a citação de Thomson e Tait:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

⁶ Talvez, apenas Cauchy seja um competidor à altura de Lagrange no quesito *diversidade de signos*. Cajori ilustra alguns dos signos utilizados por Cauchy em (Cajori, pp. 26-27, 1993).

iii. Heurística – solução de problemas

A formulação de integral de trajetórias da mecânica quântica foi útil para adivinhar as expressões finais e formular a teoria geral da eletrodinâmica (...) (Feynman, p. 30, 2003).

Conforme será discutido nessa subseção, um tipo específico de formalismo matemático pode sugerir novas questões e, inclusive, auxiliar na descoberta de uma solução para algum problema específico como se deu com Feynman em seu trabalho em eletrodinâmica quântica. Recomendamos o apêndice referente ao raciocínio diagramático, no qual discutiremos um tipo de raciocínio geométrico baseado em diagramas inventados por Feynman. Analisaremos aqui apenas o raciocínio estritamente simbólico através de alguns exemplos práticos.

Tomemos, como exemplo inicial, a introdução do símbolo para o zero. Originalmente, o numeral zero foi introduzido⁷ como um *marcador de posição*, mas abriu a possibilidade de se representar qualquer número, não importando a sua magnitude. Além disso, *a posteriori*, teve papel fundamental no desenvolvimento da teoria das equações algébricas ao permitir que elas fossem representadas por formas do tipo $x^4 - 3x^3 + x^2 - 9x = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$ (que também pode ser escrita por $x^2 + 0x - 4 = 0$). O zero foi elevado ao estatuto de *número zero* e adquiriu um papel fundamental na teoria elementar dos números. Sigamos, agora, com uma análise um pouco mais técnica do papel heurístico das notações a partir de exemplos das físicas clássica e quântica.

Na mecânica de Newton, sabemos que: *dados dois corpos c_1 e c_2 de massas m_1 e m_2 , respectivamente, o módulo da força de atração gravitacional entre eles é proporcional ao produto das suas massas e*

⁷ A propósito, recomendamos o excelente texto de Kaplan (1999) sobre a história do zero. Para uma análise filosófica do numeral zero, ver o monumental *The principles of mathematics* (Russell, Chap.XXII, 1903).

inversamente proporcional ao quadrado da distância r que os separa. Em notação matemática, sendo \vec{f} o vetor que denota a força gravitacional, escrevemos: $\|\vec{f}\| \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$. Mais precisamente, seja \vec{f}_{12} a força que o corpo de massa m_1 exerce no de massa m_2 e, analogamente, \vec{f}_{21} a força exercida pelo corpo de massa m_2 em m_1 . De acordo com a terceira lei de Newton, é válido que $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$. A lei da gravitação universal nos diz que $\vec{f}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$, ou $\vec{f}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$ - sendo G uma constante e \vec{r} o raio vetor que une os centros dos corpos. Podemos escrever, então, $\|\vec{f}\| = \|\vec{f}_{12}\| = \|\vec{f}_{21}\| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ para $r = \|\vec{r}\|$.

Até aqui, tudo o que foi dito em linguagem matemática poderia ser parafraseado em uma língua natural arbitrária, apesar da perda de economia e precisão. Todavia, caso queiramos resolver o famoso *problema de dois corpos* sujeitos à força gravitacional⁸ (Valtonen & Karttunen, Chap.3, 2005), parecer-nos-á desarrazoado deixar a simbologia matemática de lado em detrimento do vernáculo. De maneira simplificada, suponhamos que o corpo de massa m_1 seja o Sol e o de massa m_2 , um planeta arbitrário do sistema solar e desprezemos a existência de qualquer outro corpo. O problema de dois corpos consiste em resolver:

$$\vec{f}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \vec{f}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

Ora, a segunda lei de Newton nos permite escrever:

$$m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

para $\vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$, sendo \vec{x}_2 e \vec{x}_1 , respectivamente, as posições do planeta e do Sol em um determinado sistema cartesiano de referencia.

⁸ Seguiremos (Valtonen & Karttunen, Chap.3&6, 2005) na discussão referente aos *problemas de dois e três corpos*.

Através de métodos elementares para a resolução de equações diferenciais de segunda ordem, fixadas as condições iniciais, é possível resolver o problema dos dois corpos, i.e., encontrar $\vec{x}_2(t)$ e $\vec{x}_1(t)$. Mas poderíamos resolver o problema traduzindo os símbolos da linguagem matemática para o Português? A princípio, sim, mas isso só traria confusão. No nosso exemplo, subtraindo as equações, obtemos:

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -Gm_2 \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r}$$

Somando, agora, as equações:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = 0$$

A equação acima implica em:

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 + m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = C_1 t + C_2$$

sendo C_1 e C_2 constantes.

Note que seria bastante trabalhoso traduzir para uma língua natural todos os termos das expressões acima, algo do tipo para o lado esquerdo de $m_2 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -Gm_2 \frac{(m_1+m_2)}{r^3} \vec{r}$, i.e, *a massa do planeta do sistema solar – que escolhemos arbitrariamente – multiplicada pela derivada segunda com relação ao tempo do raio vetor que separa os planetas é igual a (...)*. O primeiro ponto a favor da notação é de permitir expressar com precisão e concisão o problema em questão. Busca-se, então, uma solução⁹, que

⁹ Observe que não resolvemos o problema dos dois corpos, só o formulamos. Como o nosso objetivo não é de obter uma solução matemática para o problema, recomendamos o segundo capítulo do livro de mecânica celeste de Nelson de Luca para uma análise exaustiva (De Luca, Cap.2, 1982). Poderíamos descrever o problema acima na linguagem da formulação de Lagrange da mecânica, a qual é mais geral que a de Newton e permite a adoção sistemas generalizados de coordenadas. Ora, a formulação de Lagrange deixa explícita a relação entre as leis de conservação e a existência de simetrias de um sistema físico particular, o que se generaliza através do teorema de Noether. É mais do que evidente que isso requer um aparato notacional rico e cuja descrição precisa estaria fora do escopo da linguagem cotidiana – ver (Byron Jr. & Fuller, pp. 72-80, 1992).

pode não existir. Para o problema acima, ela é simples e foi obtida primeiramente por Johann Bernoulli (1668), após Newton ter iniciado a discussão referente ao problema em seu *Principia*. Claro que a solução só foi possível por haver métodos matemáticos disponíveis para tal empreitada, os quais são obtidos da teoria das equações diferenciais ordinárias (Djairo, pp. 167-174, 2015).

Suponha, agora, que alguém insista na tese de tradução da linguagem matemática para a linguagem natural. Tome o caso do problema de n -corpos sujeitos à atração gravitacional. Grosso modo, o problema de n -corpos da mecânica celeste consiste em resolver um conjunto de equações diferenciais ordinárias - fixados os valores iniciais para as posições e velocidades de cada corpo. A força resultante \vec{f}_i no corpo de massa m_i e posição \vec{x}_i é dada por (para $n \geq 2$):

$$\vec{f}_i = m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^n G \frac{m_i m_j}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2} \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_j}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|}$$

Este problema é bastante famoso e já ocupou os folhetins reais do século XIX. No volume sétimo da *Acta Mathematica* (1885) foi anunciado um prêmio para ser entregue no sexagésimo aniversário do rei Oscar II da Suécia, i.e., no dia vinte e um de janeiro de 1889. O problema foi colocado da seguinte maneira:

Dado um sistema qualquer de um número arbitrário de pontos materiais que se atraem de acordo com a lei de Newton, supondo que dois pontos nunca colidam, encontre as coordenadas de um ponto qualquer sob a forma de uma série de funções contínuas no tempo convergindo uniformemente para qualquer valor da variável real¹⁰.

¹⁰ Segue a ata: http://www.mittag-leffler.se/sites/default/files/official_announcement.pdf

O comitê examinador era formado por grandes nomes da matemática como Mittag-Leffler, Hermite e Weierstrass, sendo que foram submetidos doze artigos, cinco dos quais tratavam o problema de n -corpos – ver (Diacu, p. 67, 1996). O jovem e brilhante matemático francês de vinte e cinco anos, Jules Henri Poincaré, ganhou o prêmio e teve o seu trabalho publicado¹¹ no décimo segundo volume da *Acta Mathematica* de 1890. Mas, referente ao problema de três corpos, o que exatamente Poincaré provou? O matemático francês provou que o problema de n -corpos ($n \geq 3$) não era integrável, i.e., não admite integrais algébricas com respeito às coordenadas de tempo, posição e velocidade, além de um conjunto de dez integrais conhecidas. Ou seja, demonstrou que, de acordo com uma determinada técnica matemática, o problema não tem solução. Curiosamente, difundiu-se que o problema de três corpos é absolutamente insolúvel, o que não é correto! Karl Sundman provou (Idem, p. 69), através de outros métodos, que é possível obter uma solução em séries de funções para o problema de três corpos sob condições iniciais assaz plausíveis. Além disso, Sundman aceitou que colisões binárias pudessem ocorrer. O caso geral do problema de n – corpos foi resolvido por Quidong Wang em 1991. Do lado teórico, os trabalhos¹² de Sundman e Wang são monumentais, mas não são tão interessantes do ponto de vista prático, visto a convergência das séries de funções que representam a solução ser muito lenta, o que pode tornar impraticável o seu uso no contexto da análise numérica.

¹¹ O trabalho de Poincaré continha um erro, o qual foi corrigido, mas apenas após a primeira publicação de sua memória. Para a história completa do tema, recomendamos o trabalho de Barrow-Green (1997).

¹² Trabalhos como os supracitados também nos levam a outros tipos de perguntas de natureza metamatemática como a de haver, ou não, problemas absolutamente insolúveis. Ora, existe um lado folclórico da matemática que considerou o problema de três corpos insolúvel, como vimos. Outro exemplo é o da prova da consistência da aritmética visada pelo programa de Hilbert, cujo fracasso se deveu aos teoremas de incompletude de Gödel. Todavia, Gentzen provou a consistência da aritmética de Peano em 1936 ao assumir métodos de indução transfinita. Recomendamos, nesta direção, o ótimo artigo de Feferman (2006).

Para todos os propósitos práticos e teóricos, não há o menor sentido em tentar resolver um problema da magnitude daquele dos n – corpos sem o uso da linguagem matemática. A linguagem cotidiana é completamente inadequada¹³ para a análise de problemas matemáticos com o mínimo grau de sofisticação. De maneira bastante simplificada, usamos as palavras para denotar ideias na linguagem natural e construímos sentenças mais complexas através de regras, mas no caso da matemática, temos símbolos definidos no seio de estruturas. Por exemplo, se G se referir a um conjunto não vazio e, definida uma operação binária “+” (que chamaremos de *adição*) $+: G \times G \rightarrow G$, supondo satisfeitos os três axiomas básicos da teoria de grupos, diremos que $\langle G, + \rangle$ é um grupo. Dito de outro modo, o conjunto G munido da operação de adição satisfaz aos axiomas da teoria de grupos – ver (Hilton & Wu, p. 3, 1977).

Os elementos de G não foram especificados, *a priori*, e há infinitos exemplos de conjuntos que, munidos de uma operação binária de adição, satisfazem aos axiomas da teoria de grupos. Neste sentido, todos os teoremas demonstrados a respeito de $\langle G, + \rangle$ se aplicarão a todos os objetos matemáticos que satisfizerem aos axiomas da teoria. Ora, através da notação, seguindo as regras, pode-se trabalhar de modo mecânico com os símbolos, os quais podem ser interpretados, *a posteriori*, como se referindo a uma plêiade de objetos, e.g., números reais, complexos, matrizes, etc. Para fixar as ideias, utilizaremos um exemplo em que um problema de matemática elementar é resolvido através da álgebra abstrata e da aritmética.

Suponha, primeiramente, que se queira encontrar dois números cuja soma seja 29 e cuja diferença seja 3 pelo raciocínio aritmético conforme

¹³ Dito de maneira mais rebuscada, seguindo Casanave, “Nas palavras de Leibniz: a forma de representação dos signos matemáticos é ectética (...)” e, finalmente, “Em resumo: o conhecimento matemático é sob signos, o conhecimento filosófico é através de signos” (Casanave, p. 65, 2007).

expresso na linguagem natural, sendo o primeiro o maior. Como o primeiro é o maior deles, podemos dizer que o segundo número mais 3 é igual ao primeiro. Logo, como ambos somam 29, o dobro do segundo número mais 3 é igual a 29, ou equivalentemente, o dobro do segundo número é 26, i.e., o seu valor é 13. Como o primeiro número excede o segundo em 3, ele será 16. Se usarmos álgebra elementar, é imediato que: $x + y = 29$ e $x - y = 3$. Subtraindo as equações, obtemos imediatamente $2y = 26$, i.e., $y = 13$. Substituindo $y = 13$ em uma das duas expressões, segue que $x = 16$. Note que a estrutura do problema revelada pela abordagem algébrica nos leva naturalmente à seguinte generalização:

$$\begin{aligned}x + y &= s \\x - y &= d\end{aligned}$$

Assim, obtemos $x = \frac{s+d}{2}$ e $y = \frac{s-d}{2}$, no caso, uma família infinita de soluções (x, y) para cada par (s, d) através de um processo puramente mecânico. Uma consequência direta: dados dois números x e y , a soma s e a diferença d entre eles é única. Reciprocamente, podemos dizer que s e d determinam de modo unívoco os números x e y . É imediato que o caso anterior é apenas um exemplo de:

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\a_{21}x + a_{22}y &= b_2\end{aligned}$$

O sistema acima de duas equações acima pode ser generalizado para sistemas de n -equações a m -variáveis com coeficientes pertencentes a um determinado corpo. O que se vê é o surgimento de uma estrutura concernente às equações lineares e, nessa direção, é desenvolvida a teoria dos sistemas de equações lineares no seio da álgebra linear (Lipschutz, Cap.2, 1971).

Dentre as estruturas estudadas pelos matemáticos, algumas podem ser úteis aos físicos, como se deu com as matrizes na mecânica quântica de Heisenberg. Hermann Weyl (1950) e Eugene Wigner¹⁴ aplicaram com bastante proeza a teoria dos grupos à mecânica quântica e criaram uma escola que definiu um paradigma para várias áreas da física, a ponto de ser colocada a questão: *Infestação ou controle de peste – a introdução da teoria dos grupos na mecânica quântica* (Bueno & French, pp. 37-68, 1999).

Ainda dentro do contexto da heurística e no sentido da aplicabilidade da matemática à física, vejamos o que Mark Steiner afirma sobre o uso da simbologia matemática em mecânica quântica:

Talvez, o mais flagrante uso de raciocínio formal em física seja o da tentativa bem sucedida para “adivinhar” as leis de sistemas quânticos usando uma estratégia conhecida por “quantização”. Esta estratégia começa ao se assumir que o sistema obedece às leis clássicas – uma assunção falsa, claro. Então, a descrição clássica é convertida (por transformações sintáticas) naquela que se espera ser uma descrição quântica verdadeira do mesmo system (...) mostrarei que as descobertas feitas desta maneira repousaram em manipulações simbólicas que beiram ao mágico (Steiner, p. 136, 1998).

Grosso modo, o que Steiner está dizendo pode ser resumido do seguinte modo: seja $K = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ a energia cinética de uma partícula de massa m , dado o seu momento $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Faça as seguintes substituições puramente sintáticas, em que as funções clássicas de energia e momento linear são reinterpretadas como operadores lineares:

$$K \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

¹⁴ Utilizamos a edição de 1950 do livro *The theory of groups and quantum mechanics* de Weyl, apesar da primeira edição inglesa ser de 1931 e a primeira edição alemã de 1928. Em 1927, Weyl havia publicado um artigo em alemão sobre teoria dos grupos e mecânica quântica em que cita Wigner.

$$p_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$p_y \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$$

$$p_z \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

Para simplificar a notação, usemos $j = 1, 2, 3$ com $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ e, analogamente, $p_1 = p_x$, $p_2 = p_y$ e $p_3 = p_z$.

Como $p_j^2 = p_j p_j = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, substituindo estes operadores na expressão para a energia cinética, obtém-se:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = -\frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\cdot)$$

Ora, aplicada à função $\psi(x_1, x_2, x_3, t)$, temos uma equação com a mesma forma da equação de Schrödinger para a partícula livre, i.e.,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_1, x_2, x_3, t) = -\sum_{j=1}^3 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \psi(x_1, x_2, x_3, t)$$

ou

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{1}{2m} \hbar^2 \nabla^2 \psi$$

E se acrescentarmos a substituição $x_j \rightarrow$ operador de multiplicação por x_j , obteremos a forma geral da equação de Schrödinger.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{1}{2m} \hbar^2 \nabla^2 \psi + V\psi = H\psi$$

Para operador de Schrödinger, $H = -\frac{1}{2m} \hbar^2 \nabla^2 + V$

Infelizmente, a equação¹⁵ de Schrödinger não foi descoberta da maneira acima e o processo de quantização¹⁶ a que Steiner se refere tem as suas raízes na reinterpretação dos colchetes de Poisson por Dirac, mas no contexto da mecânica quântica de Heisenberg. Enfatizemos que a mecânica quântica de Schrödinger é uma teoria física e que o caminho que o físico austríaco trilhou até a sua obtenção envolveu analogias, insights e outras teorias da física – ver (Dugas, pp. 554-570, 1988). Uma equação matemática sem uma interpretação física é apenas um objeto formal e que pode se aplicar à descrição de algum fenômeno da natureza ou não. Caso a equação $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi$ tivesse sido obtida e estudada de modo independente e anterior à sua utilidade em mecânica quântica, não haveria mistério algum relacionado a isso; seria apenas mais um caso de um objeto matemático que veio a ter utilidade em física e, o seu nome, possivelmente, não seria *equação de Schrödinger*.

Na mesma direção, se pegarmos a expressão para a energia relativística, $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$, e fizermos as substituições acima, obteremos uma nova expressão. Como é sabido, Schrödinger elaborou tais substituições, mas descartou a equação obtida por não ser invariante por transformações de Lorentz e por dar origem a¹⁷ *probabilidades negativas*. Porém, Klein e Gordon não a descartaram. Feitas as substituições a que nos referimos, obter-se-á:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x_1, x_2, x_3, t) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \psi(x_1, x_2, x_3, t)$$

¹⁵ A respeito da criação da equação de Schrödinger, ver (Dugas, 1988, pp. 554-570).

¹⁶ Para uma análise dos argumentos de Steiner e sobre a estrutura formal do processo de quantização ver, respectivamente, (Grande, §1.2.3, §1.3.1 & pp. 128-139, 2011) & (Isham, §5.2., 2001 & Ali & Englis, §2, 2005).

¹⁷ Tecnicamente, tem-se que a expressão para a densidade de probabilidade assume valores negativos – ver (Dyson, p. 4, 2007).

ou simplesmente,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = \nabla^2 \psi$$

Para $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$, o operador d'alembertiano, a expressão acima se reduz a:

$$\square \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

Os físicos costumam utilizar um sistema de unidades em que $c = \hbar = 1$. Neste caso, a equação assume a sua forma padrão:

$$(\square + m^2) \psi = 0$$

Apesar de não se aplicar a elétrons, a equação de Klein-Gordon é uma equação relativística que se aplica a fótons. O ponto é que o termo $\psi(x_1, x_2, x_3, t)$ deve ser interpretado como a equação de um campo quântico – ver (Kaku, §3.2, 1993).

Steiner (pp. 159-160, 1998) se referirá a outro caso em que o simbolismo matemático exerceu um papel essencial e, a nosso ver, necessário e indispensável: eis o caso da criação da equação relativística do elétron. Coube ao gênio de Paul Dirac a tarefa de elaborar uma equação relativística para o elétron e, de sobra, prever a existência de antipartículas, fato que lhe rendeu o prêmio Nobel de física. Baseando-se em suposições físicas plausíveis (Grande, §3.1.4, 2011 & 2015), forte intuição simbólica e em sua genialidade, Dirac abordou¹⁸ a equação $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ de outra maneira ao supor que:

¹⁸ Para uma análise da criação da equação de Dirac e da descoberta do pósitron, ver (Grande, 2015) e para um trabalho matemático bastante aprofundado, ver (Thaller, 1992).

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + mc^2} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc$$

Ora, tal expressão poderia não ter solução alguma, que é o caso para dimensões inferiores a quatro (Thaller, p. 3, 1992). Todavia, para coeficientes α_i tomados como matrizes do tipo 4×4 , ela admite solução (Idem, *Ibidem*). Dirac, então, obteve a sua famosa equação relativística para o elétron após resolver a equação acima – ver também (Lindsey & Margenau, §9.17, 1956). O último exemplo que mencionaremos nesta subseção é o da introdução da unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ na teoria das equações algébricas.

Começemos com a seguinte citação que ilustra com bastante precisão a diferença entre um problema colocado na linguagem coloquial e na linguagem do cálculo matemático:

Pascal, por exemplo, descobre o esquema de um conceito de integração que poderia fundamentar a análise antes de Newton e Leibniz. Lendo seus tratados da *Roulette*, das *Ordens numéricas* e dos *Senos do quarto do círculo*, pode-se apenas admirar a potência criadora e a virtuosidade de seu pensamento. Entretanto, como ele só se preocupa em transcrever as operações que cria na linguagem diária – para o que, sabemos como ele é excelente – faltou a constituição de cálculo. Em Leibniz, que ao contrário, poderíamos acreditar como o campeão do paradigma da redução das ideias aos símbolos (...) (Granger, p. 82, 1988).

A sistematização de um cálculo simbólico não apenas serve para explicitar as estruturas matemáticas úteis à descrição de um problema específico, mas como vimos acima, é um guia heurístico para a descoberta. Suponha que se queira construir um retângulo cujo perímetro seja 20cm e cuja área seja 40cm^2 . Assim, para os lados do retângulo x_1, x_2 do retângulo, devemos ter: $2x_1 + 2x_2 = 20$ ou $x_1 + x_2 = 10$. E também será válido que $x_1 x_2 = 40$. Tal problema pode ser colocado da seguinte maneira: encontre as

raízes de $x^2 - 10x + 40 = 0$. Todavia, as suas raízes são $x_1 = 5 + \sqrt[3]{-15}$ e $x_2 = 5 - \sqrt[3]{-15}$. Formalmente, a equação tem solução, mas não existem retângulos cujos lados meçam $5 \pm \sqrt[3]{-15}$ cm. A ausência de uma interpretação física para a raiz quadrada de números negativos não impediu Bombelli¹⁹ (Granger, p. 55, 2002) de definir regras para a multiplicação de números do tipo $\sqrt[3]{-1}$, sendo uma delas: $\sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{-1} = -1$, conhecida por $i^2 = -1$. Quanto ao problema do retângulo, não vemos como abordá-lo na linguagem coloquial. Imagine um professor de geometria pedindo ao aluno para desenhar um retângulo cujos perímetro e área satisfaçam às relações acima.

Os ditos *números complexos*, ou seja, aqueles da forma $a + bi$ - para os números reais a e b - surgiram apenas como pontos de apoio para determinadas operações tidas como *impossíveis* (Idem, p. 53), mas adquiriram o estatuto de números, inclusive, tendo interpretações geométricas com o trabalho de grandes matemáticos como Gauss. Evidentemente, a notação teve papel fundamental na criação dos números complexos, os quais estendem naturalmente o conjunto dos números reais de modo a conter uma cópia isomorfa destes. Mais precisamente, o conjunto de todos os números complexos do tipo $a + bi$, para $a \in \mathbb{R}$ e $b = 0$, é isomorfo a \mathbb{R} . Os números complexos aparecem em inúmeros ramos da física clássica e moderna como na equação de Schrödinger que vimos acima, i.e.,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = H\psi(\vec{x}, t)$$

¹⁹ Bombelli não utilizou o símbolo moderno “ $\sqrt{\quad}$ ” para a denotar raízes quadradas em seu trabalho (Cajori, §496, 1993). Raízes quadradas foram denotadas de inúmeras maneiras durante a história (Idem, §316-338), mas a sua forma atual se deve a Euler (Idem, §324). Quanto à introdução da letra i para a unidade imaginária, a sua primeira aparição também se deveu a Euler em 1777. Porém, foi Gauss quem difundiu o seu uso de modo sistemático (Idem, §498).

Dissemos acima que não existem retângulos cujos lados são dados por números imaginários, também é evidente que não há partículas cujas posições são descritas por tais números. No contexto de realizações empíricas, os elementos ideais sempre desaparecem, dado que são apenas objetos matemáticos inerentes à descrição formal de um problema. No exemplo da mecânica quântica de Schrödinger, seguindo a interpretação de Max Born, toda a informação a respeito de um sistema físico está contida em sua função de onda, em geral, uma função que assume valores complexos, porém, cujo quadrado do seu módulo – um número real não negativo – nos dá a probabilidade do sistema estar em determinado estado físico. Desta maneira, os elementos imaginários desaparecem da equação de Schrödinger quando confrontada com os experimentos.

iv. Explicitação de estruturas

Discutiremos, agora, um tópico muito importante e que será retomado na próxima seção sobre o símbolo e a realidade. Para isso, utilizaremos exemplos da teoria elementar da análise tensorial. A nossa exposição será informal e deixaremos os detalhes técnicos como referências, i.e., (Bishop & Goldberg, Chap.2, 1980) & (Arfken & Weber, Chap.2, 2005) & (Cartan, Chap.2, 1966) & (Lima, 2012).

Muitas quantidades físicas não são podem ser representadas, ou não se rendem a generalizações, pelo uso de vetores ou escalares, mas apenas por objetos matemáticos mais gerais chamados de tensores. Dentre tais quantidades, podemos mencionar as tensões em três dimensões, curvatura de variedades n -dimensionais, tensores de inércia, dentre inúmeras outras. Começaremos a nossa análise com o conceito de vetor. Assim como conceito de vetor em \mathbb{R}^n generaliza o de número real, o de tensor generalizará o de vetor. Sigamos, então, falando um pouco de vetores.

Tome o conjunto dos números reais \mathbb{R} visto como um espaço vetorial sobre si mesmo. Considere, agora, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$ e defina de modo padrão:

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda(x_1, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \vec{0} &= (0, 0, \dots, 0)\end{aligned}$$

Observe que: $-(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$.

É imediato que \mathbb{R}^n satisfaz a todos os axiomas da estrutura de espaço vetorial, i.e., \mathbb{R}^n pode ser dotado de uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo dos reais \mathbb{R} - ver (Lima, Cap.1, 2009). É comum escrever $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R} \rangle$ para destacar esta peculiaridade, ou de modo mais geral, $\langle V, K, +, \cdot \rangle$, cujo significado é: o conjunto não vazio V , munido das operações binárias de adição "+" e multiplicação por escalar "." é um espaço vetorial sobre o corpo K .

Quanto ao conjunto \mathbb{R}^n , ele conterà uma cópia isomorfa de \mathbb{R} , i.e., o subconjunto $\{(x_1, 0, 0, \dots, 0); x_i \in \mathbb{R} \text{ e } x_i = 0, \text{ se } i \neq 1, \}$ é isomorfo a \mathbb{R} . Do ponto de vista de espaços vetoriais, $\langle \mathbb{R}, \mathbb{R} \rangle$ será um subespaço de $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R} \rangle$. Este último espaço vetorial foi construído de maneira puramente simbólica explicitando uma estrutura. Poderíamos ter partido de um conjunto não vazio V e de um corpo K de modo que pudéssemos obter o espaço $\langle V, K, +, \cdot \rangle$. Em seguida, tomaríamos $V^n = V \times V \times \dots \times V$, n -vezes, definiríamos as operações de adição de vetores e produto por escalar de modo análogo a $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R} \rangle$, definiríamos o elemento nulo do seguinte modo $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ e, finalmente, obteríamos $\langle V^n, K, +, \cdot \rangle$. Neste caso, temos o *esqueleto* de um espaço vetorial n -dimensional arbitrário, o qual foi revelado por um processo notacional que partiu da construção de $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R} \rangle$ e culminou em $\langle V^n, K, +, \cdot \rangle$. Essa construção sugere que todos os espaços vetoriais finitos, i.e., de mesma dimensão n sobre o mesmo corpo K são isomorfos, fato que

é de fácil demonstração. Isto significa que apresentam uma *similaridade estrutural* e, logo, tudo o que for válido para um dado espaço vetorial n -dimensional sobre \mathbb{K} , o será para qualquer outro espaço de mesma dimensionalidade sobre o mesmo corpo.

Alguma pessoa desprevenida poderia dizer: ora, \mathbb{C}^n e \mathbb{R}^n são conjuntos distintos, mas podem ser isomorfos? Note que o isomorfismo não se refere aos conjuntos em si, mas ao conceito de espaço vetorial n -dimensional sobre o mesmo corpo! O corpo dos complexos é *mais rico* do que o dos reais e, por exemplo, a equação $x^2 + 1 = 0$ admite solução em \mathbb{C} , mas não em \mathbb{R} . É mais do que evidente que tais conjuntos são distintos em vários aspectos, mas quando vistos sob a *lupa de espaços vetoriais de mesma dimensão sobre \mathbb{R}* , exemplificam uma mesma estrutura, no caso, a de espaço vetorial n -dimensional sobre \mathbb{R} . Não há mistério algum aqui, dado que estamos tomando cada elemento z de $\langle \mathbb{C}^n, \mathbb{R} \rangle$ como um objeto do tipo $\{(z_1, \dots, z_n); z_i \in \mathbb{C}\}$ e definindo as operações de modo análogo a \mathbb{R}^n , mas sempre tendo \mathbb{R} como corpo, i.e., $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R} \rangle$ e $\langle \mathbb{C}^n, \mathbb{R} \rangle$. Mais precisamente, $\langle \mathbb{C}^n, \mathbb{C} \rangle$ não é isomorfo a estes dois espaços anteriores. Note que \mathbb{R} não é algebricamente completo, i.e., nem todo polinômio com coeficientes reais possui uma raiz real, o que faz com que os espaços vetoriais complexos sejam indispensáveis na teoria dos operadores lineares – inclusive muitos teoremas sobre operadores em espaços vetoriais reais requerem a utilização de números complexos – ver (Lima, Teorema 12.1 & Cap.21, 2009). No contexto de espaços vetoriais de dimensão infinita, a teoria dos operadores lineares requererá o uso de espaços vetoriais complexos (de Oliveira, Chap.1, 2009).

Ainda sobre os vetores, existe uma maneira puramente operacional de defini-los. Neste caso, busca-se caracterizá-lo como um objeto que se comporta de uma determinada maneira quando submetido a mudanças de coordenadas. Para isso, tome $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$, de modo que $\{\vec{e}_i\}$ seja uma

base ortonormal. Tomando outra base ortonormal $\{\vec{f}_j\}$ com $\vec{e}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \vec{f}_j$, é imediato que:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \vec{f}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ij} \vec{f}_j$$

Grosso modo, para o caso de uma transformação ortogonal possível, um vetor arbitrário x' de componentes x'_i pode ser definido de maneira operacional por:

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Note que estamos definindo o vetor através das suas coordenadas, ou componentes $\{x'_j\}$, em um sistema de referência e do modo pelo qual elas se comportam em transformações ortogonais. É importante perceber que o **vetor** x' é o **objeto abstrato** representado em qualquer sistema de coordenadas (e que satisfaça a um conjunto específico de transformações), ou mais especificamente, é a **classe** de todos esses objetos x' . Evidentemente, existem conceitos teóricos por trás do processo acima, embora ele aparente ser puramente sintático. Estenderemos, agora, o conceito de vetor da seguinte maneira – supondo, mais uma vez, apenas transformações ortogonais.

Escrevamos, primeiramente, para r -soma-tórios, todos de 1 a N , a seguinte transformação r -linear invariante denotada por T

$$T = \sum_i \sum_j \dots \sum_n T_{ij\dots n} \alpha_i \beta_j \dots \gamma_n$$

Aqui $T_{ij\dots n}$ são as componentes do objeto T com relação a uma base ortogonal, no caso, justamente aquela em que $\alpha_i \beta_j \dots \gamma_n$ representam as componentes de vetores que assumimos unitários. Definimos, então, o

conceito de *tensor cartesiano de posto r* pelo conjunto de N^r elementos $T_{ij\dots n}$ que se transformam da seguinte maneira sob mudanças ortogonais (rotações):

$$T'_{ij\dots n} = \sum_p \sum_q \dots \sum_t T_{pq\dots t} a_{ip} a_{jq} \dots a_{nt}$$

Dizemos que um *tensor de posto zero* denota um escalar, enquanto um vetor é denotado por um *tensor de posto um*. No fundo, tensores cartesianos são apenas transformações multilineares – ver (Lima, Cap.2, 2012). Os físicos costumam escrever a expressão acima, assumindo a convenção de Einstein²⁰ para os somatórios, do seguinte modo:

$$T'_{ij\dots n} = T_{pq\dots t} a_{ip} a_{jq} \dots a_{nt}$$

Antes de encerrarmos a discussão sobre este exemplo, vejamos alguns aspectos ligados à notação que não transparecem à primeira vista. Usaremos um caso bem simples da álgebra multilinear – para uma análise detalhada sugerimos (Greub²¹, Chap.6, 1961 & Greub, Chap.1, 1967).

Seja o espaço vetorial V^k sobre o corpo Γ , $\langle V^k, \Gamma \rangle$, i.e., $V^k = V \times \dots \times V$ para k cópias de V . Tomemos um funcional multilinear $\varphi: V^k \rightarrow \Gamma$. Assuma que a dimensão de V seja finita e que $\{\vec{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$ seja uma base ortonormal para V . Calculemos $\varphi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$, sendo que $\vec{v}_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \vec{e}_j$ i.e., escrevemos cada vetor arbitrário como combinação linear dos elementos da base. Assim:

$$\varphi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \left(\sum_{i_1=1}^n \lambda_{i_1} \vec{e}_{i_1}, \dots, \sum_{i_j=1}^n \lambda_{i_j} \vec{e}_{i_j}, \dots, \sum_{i_k=1}^n \lambda_{i_k} \vec{e}_{i_k} \right)$$

²⁰ Sobre a convenção de Einstein, Elon Lages Lima nos diz algo curioso a seu respeito no prefácio à primeira edição de seu livro de cálculo tensorial: "(...) não só é necessária, mas é francamente absurda" e, em seguida, "(...) Kronecker e Einstein devem ser lembrados por motivos mais sérios" (Lima, 2012).

²¹ Recomendamos a segunda edição do livro de Greub, visto a seção referente à álgebra multilinear ter sido excluída a partir da terceira edição.

Utilizando a linearidade de φ em cada componente, obteremos, para k - somatórios:

$$\varphi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_j=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_j} \dots \lambda_{i_k} \varphi(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_k})$$

Omitindo o sinal de somatório, segundo a convenção de Einstein, e mantendo apenas $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$, tem-se:

$$\varphi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \varphi(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_k})$$

Visto que não importa a ordem em que os termos são adicionados, é imediato que:

$$\varphi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \varphi(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_k}) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$$

Finalmente, para $\varphi_{i_1 \dots i_k} = \varphi(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_k})$, resulta:

$$\varphi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \varphi_{i_1 \dots i_k} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$$

Assim, as componentes de φ , na base em que cada vetor \vec{v}_i se escreve como $\vec{v}_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \vec{e}_j$, são dadas por um conjunto de N^k elementos do tipo $\varphi(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_k})$ (ou $\varphi_{i_1 \dots i_k}$). Caso queiramos ver como essas componentes se transformam, bastaria escrever cada elemento da base $\{\vec{e}_i\}$ em termos de elementos de uma nova base e utilizar a k -linearidade de $\varphi(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_k})$. Evidentemente, teríamos uma expressão análoga àquela que escrevemos para $T'_{ij \dots n}$. Acreditamos que seja óbvia a analogia entre T e φ . Falemos, agora, um pouco de vetores covariantes e contravariantes, um tópico muito presente em física - ver (Cartan, pp. 7-15, 1966) para uma análise mais aprofundada e para o tópico curvas diferenciáveis em \mathbb{R}^n , recomendamos (Kreyszig, Chap.2 , 2017).

Considere uma curva $\gamma(t)$ diferenciável em \mathbb{R}^n e o seu vetor tangente $\gamma'(t)$, i.e.,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\quad \text{e} \\ \gamma'(t) &= \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right) \end{aligned}$$

Tome por $y_i = y_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$ uma mudança de coordenadas admissível e

$$\left(\frac{dy_1}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt} \right)$$

Ora, assumindo que não há sistemas de coordenadas privilegiados, seguirá que tanto $\left(\frac{dy_1}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt} \right)$ quanto $\left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)$ terão o mesmo estatuto de vetor tangente a γ , porém, vistos de sistemas de coordenadas distintos e relacionados por uma mudança de coordenadas admissível $y_i = y_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$. Neste caso,

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}$$

Escrevendo $y_i = \bar{x}_i$ e $\bar{T}^i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \frac{dy_i}{dt}$, $T^j = \frac{dx_j}{dt}$, teremos:

$$\bar{T}^i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} T^j(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Os termos \bar{T}^i , que se transformam segundo a regra acima sob uma mudança de coordenadas, são as componentes de um vetor contravariante. Enfatizemos que este vetor não é dado apenas por suas componentes em um único sistema de coordenadas, mas pela quantidade abstrata determinada pelo conjunto de todas as suas componentes T^j em todos os sistemas de coordenadas possíveis (i.e., que possam ser

relacionados por uma transformação arbitrária de coordenadas admissível, claro). Assim, construímos um campo vetorial contravariante $(\bar{T}^1(\bar{x}), \dots, \bar{T}^n(\bar{x}))$ a partir de $(T^1(x), \dots, T^n(x))$ e de cada mudança de coordenadas $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$ -sendo $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.

Considere, agora, uma função escalar $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ invariante por uma transformação de coordenadas $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n)$. Perceba que estamos assumindo, explicitamente, o seguinte:

$$\bar{\varphi}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1(\bar{x}), \dots, x_n(\bar{x}))$$

Tome o vetor gradiente de φ , $\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n})$. Calculando as derivadas parciais de $\bar{\varphi}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, teremos:

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial\bar{x}_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial\bar{x}_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

De modo genérico, se as i -ésima e j -ésima componentes de $\nabla\bar{\varphi}$ e $\nabla\varphi$ forem dadas, respectivamente, por $\bar{T}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ e $T_j(x_1, \dots, x_n)$ em seus respectivos sistemas de coordenadas, será imediato que:

$$\bar{T}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial\bar{x}_i} T_j(x_1, \dots, x_n)$$

Os termos $\bar{T}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ recebem o nome de componentes covariantes de um campo vetorial. No caso, o vetor gradiente define um campo vetorial covariante.

Os vetores covariante e contravariante são casos especiais de *invariantes diferenciais* chamados de *tensores*. De modo geral, omitindo o sinal de somatório - assumindo a convenção de Einstein mais uma vez -

definimos por *tensor ou campo tensorial absoluto* o objeto matemático²², mais precisamente, a classe de todos os objetos matemáticos cujas componentes se transformam de acordo com:

$$\bar{T}_{b_1 b_2 \dots b_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \bar{x}_{\alpha_1}}{\partial x_{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}_{\alpha_r}}{\partial x_{\alpha_r}} \frac{\partial x_{\beta_1}}{\partial \bar{x}_{b_1}} \dots \frac{\partial x_{\beta_s}}{\partial \bar{x}_{b_s}}$$

De modo geral, um *tensor ou campo tensorial* é, finalmente, definido por:

$$\bar{T}_{b_1 b_2 \dots b_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^N T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \bar{x}_{\alpha_1}}{\partial x_{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}_{\alpha_r}}{\partial x_{\alpha_r}} \frac{\partial x_{\beta_1}}{\partial \bar{x}_{b_1}} \dots \frac{\partial x_{\beta_s}}{\partial \bar{x}_{b_s}}$$

Sendo N o *peso do tensor* e $\left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|$ o jacobiano, i.e., o determinante da matriz jacobiana – ver (Naber, p. 169, 1980). Desta maneira, o conceito de tensor generaliza os conceitos de tensor absoluto, vetor (covariante e contravariante) e o de escalar. Claro que é possível desenvolver a análise tensorial e estender o conceito de derivada a objetos do tipo $\bar{T}_{b_1 b_2 \dots b_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ e analisar as notações utilizadas para os novos conceitos, o que não será feito aqui. Além das inúmeras referências mencionadas, para uma abordagem introdutória à análise tensorial, ver (Spiegel, pp. 228-241, 1961). Façamos, agora, algumas observações sobre o que foi dito nesta subseção.

Primeiramente, discutimos como o conceito de vetor em \mathbb{R}^n nos conduz à noção geral de um espaço vetorial n -dimensional. Em seguida, partimos de uma curva diferenciável $\lambda(t)$, cujas coordenadas nos dão, para cada $t \in \mathbb{R}$, um vetor em \mathbb{R}^n . Definimos o vetor velocidade $\lambda'(t)$ em um ponto arbitrário. Depois, olhamos para todas as possíveis transformações de

²² Existe um certo abuso de linguagem por nossa parte ao falarmos de tensor e de campo tensorial. O campo tensorial é definido a partir do *objeto tensor* de maneira análoga ao que foi feito com o vetor contravariante, o qual nos dá o campo vetorial contravariante.

coordenadas $y_i = y_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$. Denominamos de *campo vetorial contravariante* aquele cujas componentes $\bar{T}^i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ satisfazem a uma determinada regra de transformação, mais precisamente, o elemento abstrato $(\bar{T}^1(\bar{x}), \dots, \bar{T}^n(\bar{x}))$, fruto de toda e qualquer transformação de coordenadas possível $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n)$ e obtido a partir de $(T^1(x), \dots, T^n(x))$ - sendo $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.

Feito isso, em seguida, definimos as componentes covariantes de um vetor e, finalmente, um campo vetorial covariante. Bem, vimos que campos vetoriais covariantes e contravariantes são exemplos básicos de campos tensoriais, os quais foram definidos através da extensão de conceitos e da notação, i.e.,

$$\bar{T}_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^N T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \bar{x}_{\alpha_1}}{\partial x_{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}_{\alpha_r}}{\partial x_{\alpha_r}} \frac{\partial x_{\beta_1}}{\partial \bar{x}_{b_1}} \dots \frac{\partial x_{\beta_s}}{\partial \bar{x}_{b_s}}$$

De maneira resumida, a ideia básica é exatamente a mesma da inserção da unidade imaginária na teoria das equações algébricas:

- i. Introduce-se um conjunto novo de signos, e.g., $\bar{T}_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ou $a + bi$;
- ii. São estendidas as operações entre os signos do domínio *antigo* para um *novo* domínio;
- iii. Os *objetos antigos* são tidos como casos particulares dos novos, e.g., como se dá com o número real x que é idêntico (do ponto de vista estrutural) ao complexo $x + 0i$. Outro exemplo é aquele do campo vetorial covariante $\bar{T}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ que é um caso particular de campo tensorial $\bar{T}_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$;

Vejamos um último exemplo.

Utilizemos $\Delta x, \Delta y$ e Δz para denotar, respectivamente, as seguintes diferenças $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ e $z_2 - z_1$ entre dois números reais arbitrários.

Suponha que os eixos ox , oy e oz constituam um sistema de referência cartesiano ortogonal para o espaço euclidiano tridimensional. Assim, neste sistema de referência, o teorema de Pitágoras nos diz que: $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. Para o elemento diferencial ds , somos levados naturalmente a $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Escrevendo $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$ e $z = r \cos \theta$, demonstra-se que (Butkov, p. 38, 1988):

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

De modo genérico, escrevemos:

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx_i dx_j$$

Retomemos, agora, a curva $\gamma(t)$ de componentes $x_i(t)$. Utilizando $ds^2 = g_{ij}(x) dx_i dx_j$, podemos escrever a seguinte expressão para o comprimento da curva entre dois pontos (para dois instantes de tempo t_0 e t_1):

$$s = \int_{t_0}^{t_1} (g_{ij}(\gamma(t)) \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt})^{\frac{1}{2}} dt$$

Dessa maneira, s generaliza o conceito de distância entre dois pontos em um espaço euclidiano de dimensão finita arbitrária. Aliás, a expressão acima se aplica a espaços mais gerais chamados de riemannianos (do Carmo, p. 43, 1988) e que são de grande utilidade na teoria da gravitação de Albert Einstein – ver (Hawking & Ellis, §2.6, 1973) & (Peacock, §1.7, 2005). Aplicando métodos do cálculo variacional à expressão acima, é possível obter a equação de uma curva específica chamada de *geodésica*, um objeto matemático importante na teoria geral da relatividade de Einstein.

Os conceitos básicos mencionados anteriormente como os de tensor métrico g_{ij} , geodésica e distância são apenas alguns dentre muitos outros relevantes para a compreensão da matemática que fundamenta a teoria geral da relatividade de Einstein. Teorias tão complexas quanto a mecânica quântica de Schrödinger ou a relatividade não são frutos de manipulações simbólicas que beiram a magia, como pensa Mark Steiner (p. 136, 1998). Seria desarrazoado sustentar qualquer ponto de vista nessa direção e, lembremo-nos de que, da criação da teoria restrita da relatividade à obtenção das equações do campo gravitacional por Einstein e Hilbert, passaram-se dez anos (Pais, §14.c.-14.d., 1995). Uma teoria pode envolver inúmeros conceitos físicos e matemáticos que, em geral, transcendem à mera análise sintática e o poder heurístico da notação. Em seu texto clássico, *O significado da relatividade*, Einstein (pp.70-82, 1984), por exemplo, se deteve em uma reflexão física e filosófica bastante rica antes de partir para a abordagem matemática propriamente dita, a qual o levará às suas equações de campo (Idem, p. 105). Em suma, teorias como a(s) de Einstein são frutos do brilhantismo e trabalho árduo de seus criadores.

Antes de encerrarmos esta subseção, colocamos a questão: que tipo de conhecimento o raciocínio simbólico essencialmente provê? Teorias abstratas não precisam se referir a objetos da nossa experiência empírica. O décimo quarto capítulo do livro *Towards non-Being* de Priest (2016) se chama *Creating non-existents*. Não há nada de errado em estudar a teoria de Meinong dos *objetos inexistentes* ou em *criá-los* no contexto das lógicas não clássicas. No *pior dos mundos possíveis*, a abordagem de Priest nos será útil para a explicitação de estruturas lógico-formais, independentemente de você ser um realista ou um antirrealista – ver também (Idem, pp. 268-280). Dos espaços vetoriais às lógicas modais,

lógicas não clássicas, tensores, unidades imaginárias, etc., eis a essência do pensamento simbólico: ele revela²³ estruturas.

Em suma, acreditamos que os inúmeros exemplos mencionados em nosso livro tenham servido para ilustrar o poder dos signos e as suas vantagens sobre a linguagem natural. Parece-nos mais do que evidente que todas as vantagens heurísticas, conceituais e estruturais obtidas através dos signos não poderiam ser alcançadas pela simples utilização da linguagem cotidiana. Por outro lado, os signos, por si próprios, não são suficientes - embora necessários - para a elaboração de uma grande teoria da matemática ou da física.

²³ Não entraremos no mérito da discussão de uma teoria ter que ser consistente para que nos proveja de *conhecimento formal*, algo em que Husserl acreditava - (da Silva, p. 132 2012). Entretanto, no contexto de utilidade, há teorias quânticas de campo não renormalizáveis úteis ao físico, i.e., são inconsistentes - ver (Kaku, p. 213, 1993). Claro que isso é correto de acordo com determinadas técnicas matemáticas e, assim como o problema de três corpos é não integrável, ele é solúvel por outros métodos; logo, pode ser o caso de aquelas teorias se renderem a outro formalismo matemático. Ainda sobre o tema das teorias não renormalizáveis, recomendamos o livro de Dodd, do qual retiramos: “A força gravitacional entre duas massas pode ser descrita pela troca de grávitons entre elas. Problemas surgem, entretanto, porque, diferentemente da eletrodinâmica quântica, certos sub-processos ligados aos grávitons parecem sempre ocorrer com probabilidade infinita - a gravitação quântica não é renormalizável” (Dodd & Gripaios, p. 41, 2020).

O símbolo e a realidade - análise filosófica

4.1 Realidade fenomênica

Eu tenho considerado a questão em detalhe e me convenci de que os símbolos são parte essencial do método para penetrar por trás dos fenômenos (Born, p. 143, 1966).

O título desta seção é o mesmo do artigo de Max Born (1966) que nos inspirou a escrevê-la, no caso, *Symbol and reality*. Do mito da caverna, passando por Kant, chegando aos filmes de ficção científica como Matrix, sempre houve quem questionasse o estatuto da percepção empírica ou sugerisse a existência de algum tipo de *realidade por trás dos fenômenos*. Sobre esta questão, a seguinte citação de Leibniz, que retiramos da *Análise da matéria* de Bertrand Russell, exprime bem a nossa posição:

Embora se tenha dito que toda essa vida não passa de um sonho, e que o mundo visível nada mais é que um fantasma, eu chamaria esse sonho ou fantasma de bastante real, se, empregando bem a razão, nunca fôssemos enganados por ele - Leibniz (Russell, p. 22, 1978).

A expressão *realidade por trás dos fenômenos* é bastante vaga e, à primeira vista, soa mística. Tome o exemplo de uma descoberta científica de uma antipartícula como o pósitron. Neste caso, Dirac previu a sua existência e Carl Anderson fez a sua detecção em 1932. Ora, descobertas são feitas o tempo todo. Em 4 de julho de 2012, uma partícula com características compatíveis com o bóson de Higgs foi detectada em aceleradores de partículas. Peter Higgs teorizou a partícula em 1964 e

passaram-se longos anos até a sua detecção. Mas essas partículas e antipartículas não fazem parte da *realidade por trás dos fenômenos*, mas dos próprios fenômenos, embora, algumas possam ser detectadas apenas em situações extremas envolvendo altas energias.

Note também que existe uma carga teórica relacionada a termos como *pósitrons*, os quais surgem de interpretações físicas de expressões matemáticas, como no caso dos espiniores. Campos espinoriais por si só são apenas objetos matemáticos. No contexto da mecânica quântica, passam a ter uma interpretação física relacionada à descrição do movimento de elétrons e pósitrons na teoria da equação de Dirac - ver (Cartan, §157, 1966). A detecção do pósitron foi fortemente guiada pela teoria e o próprio físico inglês elaborou uma interpretação das soluções da sua equação que *aparentemente* previam a existência de partículas (no caso, elétrons) com energias negativas.

Dirac imaginou a existência de um *poço* com infinitos elétrons dotados de energia $E \leq -mc^2$ de modo a preencher tal poço. O princípio da exclusão de Pauli proíbe que um estado seja ocupado por mais do que um elétron e, assim, se evita que qualquer outra partícula ocupe um estado no poço. Deste modo, estamos nos comprometendo com a existência de um poço de partículas inobserváveis e de energia negativa. Entretanto, a ausência de uma dessas partículas, que Dirac chamou de *hole*, um buraco nesse poço ou mar de partículas, seria detectável e, inclusive, reagiria com campos externos. Assim, esse buraco seria, na interpretação de Dirac, a antipartícula do elétron (figura 1) - para uma discussão detalhada da teoria de Dirac do elétron ver o parágrafo §9.17 do livro de Lindsay & Margenau (pp. 501-514, 1957); sobre o experimento de Anderson, ver (Dugas, pp. 606-608, 1988).

Parafrazeando Wittgenstein (p. 55, 1968) “O mundo é tudo o que ocorre”, entretanto, parece sempre haver muito mais coisas no mundo do

que as que conhecemos em qualquer período da história humana. Deste ponto de vista, não há uma realidade por trás dos fenômenos, mas apenas uma realidade física que ainda não podemos conhecer ou descobrir através de equipamentos auxiliares como telescópios, microscópios e aceleradores de partículas. Enquanto não somos realistas em matemática, parece-nos difícil evitar alguma forma de *realismo brando* em física do tipo: *algo existe*, embora sempre se manifeste como um fenômeno natural e dependa amplamente de nossas interpretações teóricas.

O caso do pósitron ilustra bem a nossa posição: mesmo que amplamente dependente da teoria e dos equipamentos modernos de detecção, *algo existe*, chamemo-lo de pósitron, antipartícula, elétron positivo ou de buraco. Claro que alguém poderia colocar a questão de o poço infinito de elétrons ser só uma ficção útil ou de, por não ser diretamente detectável, estar *por trás dos fenômenos*. Por si só, a mecânica quântica já admite inúmeras interpretações, cujas análises estariam completamente fora dos nossos propósitos aqui. Apenas a título de curiosidade, um pósitron também pode ser interpretado como um elétron com carga positiva viajando para o passado.

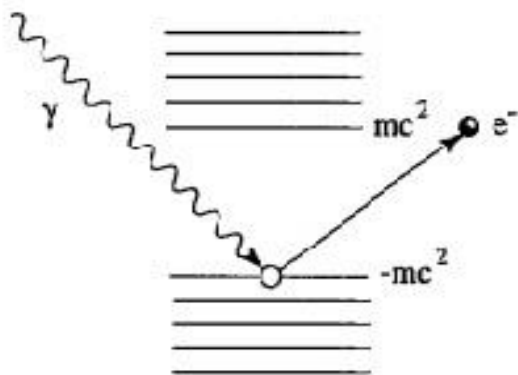


Figura 1. Quando um fóton atinge um elétron do poço infinito de energia negativa, ele deixa um buraco, o qual se comporta como dotado de energia e carga positivas. Fonte: (Kaku, p. 91, 1993).

Discutimos nos parágrafos anteriores a descoberta do pósitron, a qual teve como ponto de partida determinadas soluções da equação de Dirac. Assim, ilustramos novamente o papel heurístico da simbologia – ver (Grande, 2015). Entretanto, não há descobertas físicas sem teoria e interpretação das expressões matemáticas que, em si, não têm referência no mundo e existência independente, a nosso ver. Todavia, quanto ao dado da experiência, ele não se encaixa à mente humana de modo passivo. Mais precisamente, a nossa percepção de mundo é ativa e estruturante, ou seja, não percebemos os objetos distribuídos de modo caótico no mundo, mas através de certa *ordem temporal e organização espacial*. Pouco importa se Kant estava errado a respeito da geometria euclidiana ser a *geometria* da nossa intuição, isso não mina o ponto de vista central a respeito da estruturação subjetiva da realidade empírica. Para Born (p. 148, 1966), o advento da teoria restrita da relatividade solapou a doutrina kantiana que toma o espaço e o tempo como formas *a priori* da intuição. Já a mecânica quântica aboliu outra categoria kantiana *a priori*, a de causalidade, dado que a mecânica quântica não é determinista, mas estatística (Idem, Ibidem). Acrescentemos o advento das lógicas não clássicas que também teve o seu impacto no kantismo. Na nossa leitura, as teorias supracitadas e evocadas por Born mostram que:

- i. Com relação à teoria restrita da relatividade, o conceito de *simultaneidade absoluta*¹ deixa de fazer sentido, mas para os eventos físicos do nosso cotidiano, não há muito com o que se preocupar, dado que os efeitos relativísticos só se manifestam a velocidades extremamente altas. Claro que podemos afirmar categoricamente que não há uma geometria da nossa intuição e que seria a

¹ A respeito da inexistência de *simultaneidade absoluta*, Born nos diz que “Esta ideia levou à teoria especial da relatividade e a uma nova doutrina do espaço e tempo. As ideias de espaço e tempo de Kant como formas *a priori* da intuição foram, assim, finalmente refutadas” (Born, p. 148, 1966). Recomendamos as seguintes seções de um livro de Reichenbach aos interessados em uma análise mais aprofundada do impacto da física moderna no conceito de causalidade, (Reichenbach, pp. 24-47 & 149-156 & 211-224 & 262-270, 2013).

priori. Todavia, a tese de que percebemos o mundo impondo a ele uma estrutura continua inabalada;

- ii. A categoria de causalidade² também não é *a priori*, caso levemos em conta eventos do mundo subatômico. Contrastemos isso com: “6.32 A lei da causalidade não é lei, mas forma de uma lei (Wittgenstein, p. 122, 1968)” e “6.321 ‘Lei da causalidade’ é um nome genérico. E assim como dizemos, na mecânica, que existem leis mínimas – por exemplo, a de ação menor – existem na física, leis da causalidade, leis da forma da causalidade” (Idem, *Ibidem*). Wittgenstein vê a causalidade como possibilidade, visto não ser logicamente necessária e, desta maneira, não seria uma lei física no sentido estrito. Do mesmo modo, a indução não será uma lei, o que ficará claro na seguinte proposição: “6.37 Não há obrigação para algo acontecer depois de alguma coisa ter acontecido. Não há necessidade que não seja *lógica* (Idem, p. 125)”. Ainda sobre o impacto da física moderna na filosofia de Kant, apesar de não termos *acesso direto* a eventos microscópicos, é razoável aceitar que não há motivos para considerar a causalidade como dotada de um estatuto de categoria *a priori*. Do mesmo modo que podemos utilizar geometrias distintas para descrever o espaço físico, podemos descrever um fenômeno físico de modo causal ou não.

Falemos um pouco mais dos itens i. e ii., respectivamente. Referente à geometria, seguindo Born, concordamos em que não há espaço para o apriorismo kantiano, mas continua intocável, a nosso ver, a parte referente à estruturação do mundo por parte do sujeito, não importando a inexistência de uma geometria da nossa percepção. É óbvio que a geometria euclidiana nos soa mais *natural* pelo fato de se aplicar de modo simples à descrição de vários fenômenos da nossa realidade empírica, todavia, para habitantes de um mundo distinto, poderia ser menos trivial a sua utilidade. Pensemos em seres inteligentes cujos cérebros e corpos

² “É verdade, os modelos de movimentos eletrônicos sugeridos por Niels Bohr foram uma imitação em miniatura do movimento planetário. Entretanto, nem todas as órbitas eram ‘permitidas’, mas apenas alguns estados ‘estacionários’ caracterizados por ‘condições quânticas’ não mecânicas, e a transição entre estes estados, os ‘saltos quânticos’, seguiam regras que não tinham analogia na mecânica. Quando este desenvolvimento culminou no estabelecimento da mecânica quântica, houve um fim aos modelos mecânicos e, a propósito, também à descrição causal da física clássica” (Born, p. 153, 1966).

gelatinosos se estendessem por um ambiente de mesma natureza onde a geometria das retas, triângulos e sólidos não lhes parecesse natural. Seria razoável que esses seres descrevessem o seu mundo através de uma geometria não euclidiana. Poincaré também imaginou a existência de animais hipotéticos em um mundo de duas dimensões cuja geometria seria esférica em sua *A ciência e a hipótese* (Poincaré, pp. 38-39, 1905).

Sobre o item ii., bem, quando escrevemos $\vec{f} = m\vec{a}$ e assumimos que uma força produz uma aceleração, ou mais precisamente para o nosso exemplo da seção 3.2., em que o planeta de massa m_2 sofre uma aceleração devido à força causada pelo planeta de massa m_1 , $\vec{f}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$, estamos dando uma interpretação causal das leis da mecânica de Newton - e aceitando a ação à distância. Em suma, não é preciso invocar a mecânica quântica para falarmos de interpretações não causais, basta descrever o movimento de uma partícula por um princípio de mínima ação. A *Crítica da razão pura* de Kant foi publicada em 1781, já o primeiro volume da *Mecânica analítica* de Lagrange é de 1788. Em sua obra principal, o grande matemático francês deu inúmeras contribuições originais à física, difundiu e condensou os trabalhos de ilustres matemáticos como os de Euler, D'Alembert, Clairault, Fermat e Bernoulli, dentre muitos outros que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo variacional e princípio de mínima³ ação - ver (Dugas, pp. 332-333 & 345-346, 1988).

Tomemos, neste contexto dos princípios variacionais, uma citação de Feynman: "(...) as leis de Newton poderiam, ao invés da forma $\vec{f} = m\vec{a}$, ser enunciadas da seguinte maneira: a energia cinética média menos a energia potencial média é a menor possível para a trajetória de um objeto

³ Sobre os princípios de mínima ação, a sua história é longa e pode ser remetida, inclusive, a Aristóteles (Rojo & Bloch, pp. 6-7, 2018), mesmo que de modo bastante intuitivo e longe de qualquer formulação matemática. Entretanto, atribui-se a Maupertuis a sua primeira formulação explícita, mesmo que em um contexto religioso e metafísico (Idem, pp. 2-3).

movendo-se de um ponto a outro” (Feynman & Leighton & Sands, §19.2, 2009). A mecânica clássica admite várias formulações⁴ matemáticas, porém, interpretações distintas e, no caso da formulação de Lagrange, não é mister falar em causa e efeito. Ora, concordamos com Granger em que as formulações distintas de uma teoria, mesmo no caso de serem matematicamente equivalentes, correspondem a modos também distintos de construção do objeto físico (Granger, pp. 19-25 & 33). No caso da mecânica clássica, ela admite várias formulações, algumas matematicamente equivalentes. A mecânica quântica⁵ também admite inúmeras formulações sendo as de Schrödinger e de Heisenberg as mais conhecidas. Vejamos, agora, o ponto central das ideias de Born.

4.2 O Estruturalismo e o realismo de Born

O físico alemão nos diz que: “Eu desejo falar apenas sobre as ciências exatas, que é o que conheço. Nelas os símbolos matemáticos são usados e eles têm uma particularidade: eles revelam estruturas”. Aqui notamos uma clara noção da interpretação estruturalista da matemática. Em seguida, ele nos diz que:

A matemática é apenas a detecção e a investigação de estruturas do pensamento que repousam escondidas nos símbolos matemáticos. A entidade

⁴ Para uma grande variedade de problemas físicos, pode-se optar por um tipo de formulação matemática da teoria, todavia, a equivalência matemática de diversas formulações de uma teoria não é um ponto trivial. “A Lei da Ação e Reação, por sua vez, tem validade restrita a sistemas puramente mecânicos; sistemas eletromecânicos nem sempre a obedecem” (Da Costa & Doria, p. 36, 2016). As formulações de Lagrange e Hamilton são mais gerais do que a de Newton e podem ser diretamente relacionadas pelo formalismo da transformação de Legendre e, então, consideradas matematicamente equivalentes. Inúmeras formulações da mecânica clássica são discutidas no livro clássico de Whitaker (1937).

⁵ Schrödinger, a título de ilustração, elaborou uma prova matemática da equivalência das teorias, todavia, está incorreta. Apesar de haver inúmeras abordagens que sugerem a equivalência matemática das formulações de Schrödinger e Heisenberg, há muito folclore e mal entendido sobre o tema. Para todos os propósitos práticos, a equivalência é assumida, porém, dependendo da regra de quantização utilizada, mesmo no caso não relativístico, as teorias podem dar resultados distintos – ver (Faria & França & Malta & Sponchiado, 2002) & (de Gosson, 2014). Para o caso da eletrodinâmica quântica, Dirac (1964) nos dirá que as formulações de Schrödinger e Heisenberg não são equivalentes.

matemática mais simples, a cadeia de inteiros 1,2,3 ... consiste de símbolos que são combinados de acordo com certas regras, os axiomas da aritmética (...) Estas regras determinam um vasto número de estruturas; e.g., os números primos com as suas extraordinárias propriedades e distribuições complicadas, os teoremas de reciprocidade de resíduos quadráticos, etc. A geometria lida com estruturas espaciais que aparecem analiticamente como invariantes em transformações (Born, pp. 151-152, 1966).

Concordamos com Born em sua interpretação estruturalista que, de uma maneira simplificada, pode ser colocada do seguinte modo: a matemática é uma ciência puramente estrutural e, à medida que uma teoria da física é desenvolvida, algumas dessas estruturas podem ser convenientes à sua formulação. Dentre elas, pode ser que algum matemático já as tenha estudado no passado, como se deu com as matrizes na mecânica matricial de Heisenberg. Ainda com relação a Max Born, achamos bastante esclarecedora a seguinte nota a respeito das estruturas matemáticas e da física:

A transição para a realidade é feita pela física teórica que correlaciona símbolos aos fenômenos observados. Onde isso pode ser feito, estruturas ocultas podem ser coordenadas aos fenômenos; exatamente essas estruturas são consideradas pelo físico como a realidade objetiva que jaz por trás dos fenômenos subjetivos (Idem, p. 152).

Na citação acima, vemos que Born acreditava na existência de uma realidade objetiva por trás dos fenômenos subjetivos dada por estruturas. Juntando as duas últimas citações, podemos constatar em Born, claramente, um realismo de estruturas que se opõe a Kant e ao idealismo em pontos óbvios, dado que, para Kant, a *realidade em si* não está condicionada ao sujeito e se encontra fora da cognição. Para Born, os símbolos dão ao cientista o acesso a uma realidade objetiva. Por um lado,

os símbolos revelam estruturas e, por outro, permitem o conhecimento de uma realidade objetiva, essa é a nossa leitura do artigo de Born.

Embora concordemos com o físico quanto à primeira citação, precisamos fazer algumas observações com relação à segunda. A nosso ver, os símbolos ajudam o físico a fazer descobertas, as quais requerem uma vasta bagagem teórica e aparatos técnicos. Isso é possível por haver uma identificação entre as estruturas simbólicas da matemática e a nossa percepção estruturante da realidade empírica. Achamos mais coerente dizer que os símbolos nos ajudam a estender o nosso conhecimento para novos *recortes da realidade*. Seria contraditório dizer que conhecemos o que está *por trás dos fenômenos*, visto só termos acesso aos próprios fenômenos. Tome o caso do poço infinito de elétrons como exemplo. Neste caso, não sabemos se existe algo desse tipo, visto só o pósitron ser passível de detecção.

Apesar do nosso apreço pelo físico alemão, ele não desenvolve com detalhes o tema que se propõe, o qual foi tratado com maior profundidade por vários pensadores, dentre eles, Husserl. A propósito, Born nos diz⁶ ter frequentado aulas com Husserl, mas que não se sentiu satisfeito, apesar de não dizer exatamente o motivo. Ainda com relação a Husserl e ao pensamento simbólico, seguiremos de perto (da Silva, 2012) nos próximos parágrafos.

Sistemas notacionais são, obviamente, simbólicos. Vejamos o caso de números cujos significados nos remetem a algo – ou são abstraídos da

⁶ “Referindo-se “sistemas idealistas”, após citar Kant e Hegel, Born acrescenta que: “vários outros, dentre eles, a ‘fenomenologia’ de Husserl, cujas aulas eu frequentei há 60 anos atrás em Göttingen (...). Mas aquilo não me satisfaz” (Born, p. 146, 1966). Primeiramente, Born não é detalhista quanto ao conteúdo das lições de Husserl, menos ainda ao porquê de não ter se convencido de algo. Em segundo lugar, Husserl elaborou uma filosofia bastante diferente da de Hegel e não achamos justo coloca-los sob a mesma alcunha de *sistemas idealistas* sem deixar explícitas as diferenças de pensamento. Finalmente, vemos em Husserl uma fonte riquíssima de ideias e conceitos cuja articulação caracteriza uma belíssima filosofia das formas simbólicas e, além disso, nos permite elaborar uma explicação para a aplicabilidade da matemática à realidade empírica – ver (da Silva, p. 136, 2012).

intuição - e.g., *setecentos e trinta e sete milhões e quatrocentos e vinte mil*. Neste caso, o sistema notacional (por exemplo, o sistema decimal) gera o seu representante simbólico 737.420.000, ou apenas $7,3742 \cdot 10^8$. Bem, através de um simples processo de abstração, podemos gerar números naturais *ad-hoc* pela sua representação no sistema decimal $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$, com $a_j \in \{0,1,2 \dots, 9\}, j = 0,1, \dots, n$ e também pelos algoritmos elementares de adição ou de produto, e.g. Para números muito grandes, só podemos concebê-los por signos. Neste caso, estamos falando de números naturais, objetos cuja *existência* nos parece mais intuitiva do que números complexos, matrizes, tensores ou espinores, visto podermos contá-los até certa magnitude. Através de um processo de abstração e apoiados na notação, somos convencidos de que os demais números, não importando a sua magnitude, se comportam como aqueles da nossa intuição numérica limitada. Mas falta algo aqui, mas o que seria?

Os sistemas notacionais não existem de modo arbitrário e aleatório, cada sistema é circunscrito por regras. No caso dos números naturais, temos a axiomática de Peano, ou seja, existe um esqueleto formal que subjaz à teoria dos números naturais. Números irracionais existem como limites de seqüências de números racionais e, assim, são convenientemente definidos pela axiomática dos números reais. Com relação ao excelente texto de Born, encerramos aqui a sua análise.

5

Conclusões

Tentamos esclarecer o papel das notações e do raciocínio simbólico em matemática através de quatro aspectos que consideramos fundamentais conforme a seção 3.2. do nosso trabalho. Utilizamos inúmeros exemplos, dentre eles, dois tipos de notação para o cálculo diferencial e integral.

Procuramos mostrar as diferenças entre as notações de Newton e Leibniz, as suas vantagens e desvantagens para a construção do edifício do cálculo e os motivos da comunidade de matemáticos ter optado pelo simbolismo leibniziano. Quanto à precisão e concisão, não encontramos diferenças relevantes entre as notações dos matemáticos inglês e alemão, caso nos restringamos ao cálculo diferencial de uma variável apenas. Entretanto, complicações enormes relacionadas à notação de Newton surgem quando passamos para o cálculo de várias variáveis, sendo que a notação de Leibniz começa a mostrar inúmeras vantagens ligadas à possibilidade de ser estendida naturalmente.

No contexto da heurística, demos exemplos de como as descobertas científicas podem se apoiar, em parte, na manipulação de termos presentes em equações, como no caso das equações de Klein-Gordon e de Dirac. Evidentemente, os signos são manipulados de acordo com regras que, por vezes, são modificadas e estendidas a novos formalismos, nos quais os signos podem ser dotados de novas interpretações. Por exemplo, os termos referentes aos momentos lineares na equação clássica da energia cinética foram reinterpretados como operadores autoadjuntos em mecânica quântica não relativística (seção 3.2.). Neste caso, os operadores

de momento e de posição (obtidos das funções clássicas que descrevem as posições e momentos lineares de partículas) não satisfazem às mesmas regras de manipulação simbólica que as funções das quais foram obtidos, i.e., eles não comutam.

Finalmente, discutimos o aspecto ligado à explicitação de estruturas que é o que julgamos mais importante e que ilustra o porquê de a linguagem formal ser indispensável para a ciência, tendo aí a sua vantagem principal sobre a linguagem natural. A explicitação de estruturas permite generalizações imediatas, como no caso da solução de um problema de aritmética elementar resolvido de maneira algébrica. Na seção quarta, procuramos elaborar uma reflexão filosófica referente à natureza do conhecimento simbólico tendo como ponto de partida um artigo de Born (e a quarta parte da seção 3.2.). Em suma, acreditamos que as nossas posições filosóficas sobre a natureza do raciocínio simbólico ficaram claras.

6

Apêndice: raciocínio diagramático em mecânica quântica

Neste apêndice¹, será apresentado um tipo de raciocínio que ilustrará a importância do uso de diagramas como auxiliar do pensamento em problemas técnicos ligados à mecânica quântica de campos. Os diagramas a que nos referiremos receberão o nome de *diagramas de Feynman*.

6.1 Introdução histórica

Feynman: Eu não posso lhe contar quando os escrevi pela primeira vez (...) Eu provavelmente criei diagramas para me ajudar a pensar sobre (expressões de perturbações) (...) Provavelmente, não era uma invenção específica, mas uma abreviação com a qual eu fui me ajudando a pensar e que, gradualmente, desenvolveu-se em regras específicas para alguns diagramas (...)

Weiner: para ajudá-lo a pensar fisicamente? Em outras palavras, você estava vendo no físico (...)

Feynman: Não, expressões matemáticas. Expressões matemáticas. Um diagrama para ajudar a escrever as expressões matemáticas (Wurtrich, p. 6, 2010).

Foi em um encontro famoso em uma pousada em Pocono Manor na Pensilvânia em 1948 - *Pocono Conference* (Mehra, pp. 245-248, 1994) - que o célebre físico norte americano Richard Phillips Feynman apresentou alguns dos seus diagramas pela primeira vez. Todavia, a sua recepção foi muito pouco calorosa, em parte, devido à falta de clareza concernente à estrutura dos diagramas e à inexistência de um conjunto claro de regras que regessem o seu uso. Além disso, Feynman foi precedido em sua apresentação por

¹ Quanto às figuras utilizadas aqui, os créditos são todos dos trabalhos em que se encontram e que serão devidamente citados, em especial, (Aguilar, 2018).

Schwinger², um dos criadores da eletrodinâmica quântica e cujo método para resolver o famoso *problema dos infinitos* nas teorias da radiação (eletrodinâmica quântica ou QED) se baseava em conceitos padronizados e de domínio dos físicos. O método diagramático de Feynman estava longe de ser claro para a maioria dos cidadãos presentes no encontro. Ora, não existem trajetórias bem definidas em mecânica quântica³ e Feynman não era claro a respeito dos seus diagramas representarem fenômenos, serem abreviações de fórmulas ou apenas uma “muleta” para o pensamento.

Foi o matemático Freeman Dyson⁴ (1949) quem derivou as regras para o uso dos diagramas e ofereceu as instruções para a sua aplicação. Além disso, coube a Dyson (1949*) demonstrar a equivalência das formulações de Feynman, Schwinger e Tomonaga da eletrodinâmica quântica e estender o processo de renormalização a todas as ordens de perturbação. Dyson ainda foi o principal responsável pela difusão das técnicas diagramáticas criadas por Feynman na física do mundo pós-guerra - ver (Kaiser, 2005*). O trabalho de Dyson (1949) parte do formalismo da matriz de espalhamento, mas do ponto de vista didático, é bastante razoável apresentar os diagramas de Feynman como uma consequência da formulação de Feynman (1948) da mecânica quântica. Tal procedimento pode ser feito também no contexto da mecânica

² Para uma comparação entre os métodos de Feynman e Schwinger, indicamos Dyson (1949*) & (Yourgrau & Mandelstam, pp. 127-141, 1979).

³ Existem inúmeras interpretações da mecânica quântica (Pessoa Jr., pp. 119-152, 2006*) e David Bohm elaborou uma delas chamadas, na qual é possível falar de *trajetória*. Entretanto, não entraremos no mérito da teoria de Bohm (Pessoa Jr, pp. 239-241, 2006) e aceitaremos, implicitamente, a interpretação de Copenhagen (Pessoa Jr., Cap.XI-XII, 2003). Para o caso da mecânica quântica de campos, recomendamos (Redhead, 1990) para uma discussão concernente à interpretação do conceito de campo quântico. Grosso modo, para o caso do campo quântico, parte-se de um sistema físico dotado de infinitos graus de liberdade (i.e., de um campo clássico). Através da análise de Fourier, a sua quantização é reduzida à quantização de infinitos osciladores harmônicos independentes - ver (Kaku, Chap.2, 1992). Recomendamos também o trabalho de (Bassalo & Cattani, 2009) para o estudo dos osciladores harmônicos clássico, quântico, relativístico e quântico relativístico.

⁴ Dyson publicou dois artigos fundamentais para a QED em 1949. No primeiro, demonstrou a equivalência das teorias de Feynman, Schwinger e Tomonaga. No segundo, estabeleceu as regras que regem os diagramas de Feynman. Para diferenciar artigos publicados por um mesmo autor em um mesmo ano, utilizaremos o sinal “*” sobre a data de publicação.

quântica não relativística e, então, estendido para a mecânica quântica de campos, como nos mostra Ryder (pp. 156-174, 1994). Entretanto, a utilização de diagramas de Feynman em mecânica quântica não relativística é de pequeno valor. Não há dúvidas de que o trabalho de Dyson contribuiu para que Feynman, Schwinger e Tomonaga dividissem o prêmio Nobel⁵ de física em 1965. Infelizmente, as regras monolíticas da Academia Real das Ciências da Suécia não permitem que mais do que três pesquisadores de uma mesma área recebam o prêmio simultaneamente.

A primeira aparição de um diagrama de Feynman em um artigo científico de seu criador se deu em 1949 em “Space-time approach to quantum electrodynamics” – ver figura 1. Porém, curiosamente, a primeira ocorrência desse tipo de diagrama ocorreu em trabalhos de Dyson (1949) alguns meses antes. É importante mencionar que Dyson nunca reivindicou qualquer autoria com relação à utilização de diagramas em seus trabalhos e sempre deu a Feynman todos os créditos por sua criação. E a respeito da publicação dos diagramas por Dyson, Feynman disse a Mehra “Certamente, ele teve a minha permissão para a publicação. Somos bons amigos” (Mehra, p. 630, 1994).

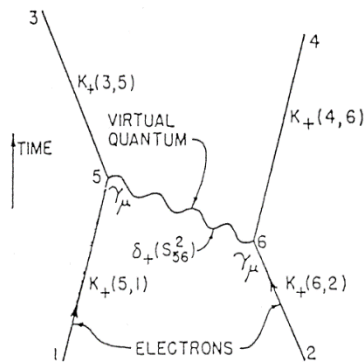


Figura 1

⁵ Recomendamos o excelente livro de Schweber (1994) para a história das formulações matemáticas da QED.

6.2 O que é um diagrama⁶ de Feynman⁷?

6.2.1 Raciocínios diagramáticos

O uso de raciocínios diagramáticos é bastante comum em física, sendo que alguns se utilizam de figuras, desenhos ou diagramas que se colocam como representações de algum aspecto ou recorte da realidade. Na figura abaixo, as forças e as suas componentes envolvidas no problema são representadas por vetores e, o ângulo que dá a inclinação do plano, por um número real.

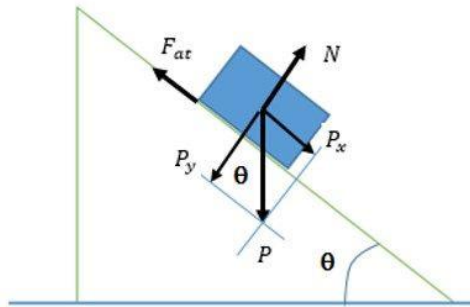


Figura 2

Neste caso, temos uma representação constituída de dois aspectos:

- i. Um objeto físico em um plano inclinado de um ângulo θ ;
- ii. Representações abstratas das forças e de suas componentes que agem no corpo.

Quanto ao primeiro aspecto da representação, ele é um recorte abstraído e idealizado da realidade. Referente ao segundo, temos conceitos

⁶ Embora estejamos restringindo o nosso trabalho ao caso da eletrodinâmica quântica, as regras diagramáticas podem ser estendidas a casos mais gerais - ver (Dunne, p. 370, 2001). Também é importante deixar claro que há hierarquias de diagramas (Daniel, p. 126, 2006), os quais não serão discutidos em nosso artigo.

⁷ Seguiremos, nesta seção, (Aguilar, 2018).

teóricos envolvidos como os de força de atrito, peso e normal. O desenho acima pode ajudar o físico a resolver o problema elementar do corpo de massa m em um plano inclinado de um ângulo θ , no qual a figura funciona diretamente como ponto de apoio para cálculos básicos. Há inúmeros outros tipos de raciocínios dessa natureza em física e matemática. Em alguns casos, há outras hipóteses, suposições e identificações, como no caso de Descartes.

Descartes foi engenhoso ao identificar a matéria com a extensão, fato que o permitiu trabalhar as suas ideias físicas através de figuras geométricas e movimento e, assim, obter algumas consequências. Dentre as suas hipóteses e identificações, destacamos as seguintes:

- i. Como o espaço é infinito, a matéria o é;
- ii. Como o espaço é homogêneo, a matéria também é;
- iii. Sendo divisível o espaço, a matéria também o será;
- iv. Como não há espaço sem extensão, não há matéria sem extensão.

Já em Newton, temos construções engenhosas, como na primeira proposição da seção II (Proposição I – Teorema I) referente à lei das áreas (Newton, p. 765, 2002). Neste caso, mais uma vez, as figuras são representações abstraídas e generalizadas de aspectos da realidade. Note que estamos aplicando a matemática a uma representação física de algum recorte do mundo da nossa percepção empírica. Entretanto, há exemplos mais abstratos que o físico usa para representar um determinado aspecto da realidade, como no caso do modelo atômico de Bohr. Não é incomum, entretanto, encontrarmos em textos didáticos de física, desenhos que representam um elétron em uma trajetória circular - como no ótimo livro de estrutura da matéria de José Leite Lopes (p. 391, 2005). Neste caso, o elétron é representado por uma partícula que orbita um núcleo central de modo que, para uma órbita estacionária, podemos aplicar as leis da

eletrodinâmica clássica. Todavia, a transição de uma órbita à outra não é descrita pela mecânica clássica, mas por um postulado (Idem, pp. 391-395).

A história dos modelos atômicos é longa e rica e, em muitos casos, e.g., modelo de Thomson⁸, as representações dos átomos não serviriam de ponto de apoio para a obtenção de expressões matemáticas. Entretanto, no caso do átomo de Bohr, o desenho não é só uma metáfora, mas é possível utilizá-lo como uma ferramenta de cálculo para a obtenção dos níveis de energia do elétron. Curiosamente, o modelo de Bohr não se aplica a átomos mais complicados como o de Hélio. Embora, Sommerfeld e Wilson tenham estendido o trabalho de Bohr ao elaborarem um método de quantização que se aplicaria também ao átomo ionizado de Hélio (Pauling & Wilson, pp. 28-47, 1935), o estudo adequado da estrutura atômica foi elevado a novos patamares com os trabalhos de Heisenberg e de Schrödinger (Idem, Chap.5&15).

No caso de Bohr, temos uma representação bastante idealizada do átomo de hidrogênio e que tem o seu valor heurístico e histórico, mas que não é considerada um *retrato físico* de um átomo. Curiosamente, um retrato falso⁹, mas que permite a obtenção de valores corretos para os níveis de energia do elétron. Todavia, em várias áreas da matemática, temos a aplicação de uma teoria à outra através da identificação de estruturas por isomorfismos, como no caso da geometria algébrica, algo que já estava presente na *Geometria* de Descartes, onde temos a resolução de problemas geométricos através de equações algébricas.

⁸ Recomendamos o artigo de Baily (2012) em que são analisados inúmeros modelos atômicos elaborados durante o começo do século XX.

⁹ Seria tautológico afirmar que toda teoria física tem a sua aplicabilidade restrita a um pequeno recorte da realidade, mas não é trivial explicar o porquê de ela falhar para casos com alguma similaridade, como ocorre quando se passa de um átomo com um elétron para outro com dois. Dito de modo simplificado e informal: se o elétron orbita o núcleo do átomo de hidrogênio, por que dois elétrons não orbitariam o núcleo do átomo de hélio? Em que parte da descrição o modelo recortado do mundo perdeu a sua ligação com realidade? A equação de Schrödinger permite obter os níveis de energia mencionados, todavia, o átomo de hidrogênio não é mais descrito do modo que Bohr o descreveu e os elétrons não são vistos como partículas que giram ao redor de um núcleo central do mesmo modo que a Terra orbita o Sol.

6.2.2 Diagramas de Feynman

Referente aos diagramas¹⁰ de Feynman, a nossa tese é a de que funcionam apenas como uma ferramenta para a obtenção de termos de uma expansão em série de expressões matemáticas. Sustentaremos, então, que não cabe a eles o papel de representar um recorte da nossa realidade empírica. Vejamos, então, o que é um diagrama de Feynman.

Um espalhamento de partículas, grosso modo, pode ser colocado da seguinte maneira esquemática:

Partículas iniciais → *interação* → *partículas finais*

Em mecânica quântica, é mister calcular a amplitude de probabilidade de espalhamento M_{fi} , i.e., uma função complexa dos momentos das partículas e cujo quadrado nos dá a probabilidade de transição de um sistema de um estado inicial $|\psi_i\rangle$ a um estado final $|\psi_f\rangle$. Os diagramas de Feynman são, *a priori*, uma ferramenta bastante útil para a obtenção da amplitude de espalhamento M_{fi} , a qual nos permite calcular o valor de inúmeras expressões físicas (Mattuck, pp. 11-24, 1992).

Podemos dizer que um diagrama de Feynman em eletrodinâmica quântica (QED) é constituído¹¹ de alguns elementos básicos, dentre eles, linhas estilizadas para cada tipo de partícula e de um eixo bidimensional (que denota o espaço e o tempo). Na figura abaixo (Aguílar, p. 2, 2018), temos as linhas com traços retos para elétrons e^- e pósitrons e^+ e, também,

¹⁰ Existem interpretações distintas dos diagramas, e.g., discussões sobre a sua ontologia e a respeito do que realmente representam. Recomendamos o artigo de Kaiser (1999) em que é analisada a possibilidade de os diagramas nos comprometerem com uma ontologia de partículas.

¹¹ É sempre importante ter em mente que há inúmeras variações estilísticas referentes a um diagrama de Feynman, como mostra Kaiser (p. 163, 2005 & p. 32, 2005*).

a linha ondulada para o fóton γ . Utilizamos x para denotar as coordenadas espaciais das partículas e, claro, t para a coordenada temporal¹²:

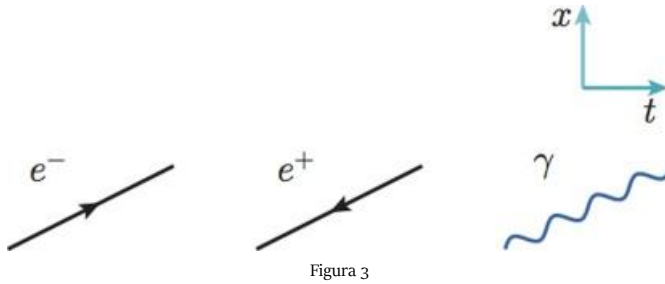


Figura 3

Na representação acima (Aguilar, p. 3, 2018), é importante notar que as setas fazem parte das convenções para a construção dos diagramas - fixada a orientação temporal. Dissemos que a linha ondulada representa o fóton, mas mais precisamente, ela representa o propagador do fóton, i.e., uma função matemática - dita *função de Green* que conecta dois pontos do espaço-tempo - ver (Schulman, Chap.1, 2005). Em um diagrama de Feynman, as interações são representadas nos vértices e, nestes pontos, é que as partículas são criadas ou destruídas. No caso da interação eletromagnética, há apenas um tipo vértice, no qual um fóton é trocado, sendo a intensidade da interação proporcional à carga elétrica do elétron. Em cada vértice são conservadas várias grandezas físicas (quadrivector¹³, carga elétrica, spin, etc.).

¹² Note que, na figura 1, Feynman representou a coordenada temporal na direção vertical, que será a convenção adotada por Griffiths (p. 59, 1987), diferentemente da que estamos seguindo aqui.

¹³ Quadrivector que substitui o momento linear clássico e incorpora a energia.

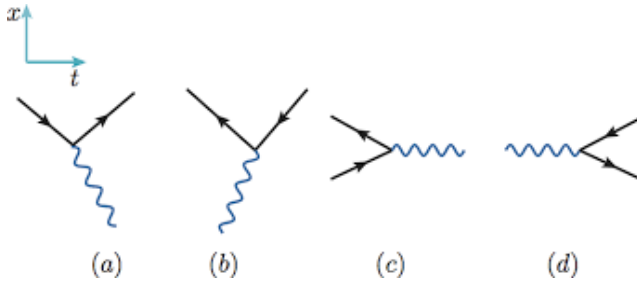


Figura 4

Na figura acima¹⁴ (Aguilar, p. 4, 2018), temos em (a) um elétron que emite um fóton e segue a sua *trajetória*; em (b), um pósitron que absorve um fóton e segue o seu *caminho*; em (c), um pósitron e um elétron que se aniquilam dando origem a um fóton. E finalmente, em (d) temos um fóton dando origem a um elétron e um pósitron. Com um pouco de prática, podemos representar também os momentos p_i nos diagramas (idem, p. 7):

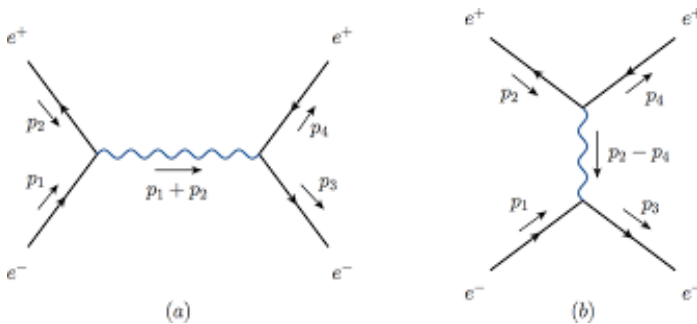


Figura 5

Nas figuras acima, temos a representação do espalhamento de um elétron e um pósitron conhecido por *espalhamento Bhabha*, também denotado por:

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$$

¹⁴ O leitor atento deve ter percebido que os pósitrons podem ser interpretados como partículas viajando para o passado. Como sustentamos no artigo, os diagramas não são representações da realidade empírica.

sendo que há apenas duas possibilidades para este evento. Logo, é necessário somar a contribuição para a amplitude oriunda de cada um dos dois diagramas ditos *topologicamente distintos*. No primeiro diagrama, um elétron e um pósitron se aniquilam, um fóton virtual¹⁵ é produzido e, então, um par elétron-pósitron é gerado. No diagrama (b), o elétron e o pósitron trocam um fóton. De modo geral, para uma quantidade arbitrária de diagramas, a amplitude de espalhamento é obtida pela adição de todas as amplitudes, isto é, a cada diagrama está associada uma amplitude M_k , e a amplitude M_{fi} é dada por $\sum_k M_k$. A necessidade de se adicionar as amplitudes pode ser justificada a partir da formulação de Feynman da mecânica quântica via integrais de trajetórias em que se atribui uma amplitude de probabilidade a cada trajetória e o resultado final é obtido pela adição de todas elas (Schulman, Chap.9, 2005)¹⁶.

6.3 O que exatamente um diagrama de Feynman representa?

6.3.1 A matemática e a realidade empírica

Por favor, entenda: estes diagramas são puramente simbólicos; eles *não* representam trajetórias de partículas (como você poderia vê-las, digamos, em uma fotografia de uma câmara de bolhas). A dimensão vertical é o *tempo*, e as separações espaciais horizontais não correspondem a separações espaciais (...) Cada diagrama corresponde a um *número* particular, o qual pode ser calculado usando as, então chamadas, *regras de Feynman* (Griffiths¹⁷, p. 59, 1987).

¹⁵ Partículas virtuais existem durante um período de tempo ínfimo e não precisam satisfazer à equação relativística $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$, enquanto que, as partículas reais necessariamente o fazem. Partículas virtuais não podem ser *observadas* diretamente, todavia, os seus efeitos são deduzidos através das partículas reais. Para uma discussão a respeito da interpretação das partículas virtuais, ver (Weingard, pp. 43-58, 1990).

¹⁶ As regras para a utilização dos diagramas também podem ser obtidas a partir da formulação da teoria das perturbações (Dyson, 1949), integral de Wiener (Schulman, Chap.9-10, 2006), dentre outros modos. Deixamos também as seguintes referências: o livro de QED de Bassalo (pp. 147-164, 2006), o guia de McMahon (pp. 163-185, 2008) para o estudo dos diagramas e os clássicos de Schweber (pp. 447-575, 2005) e Schroeder & Peskin (1995) que utilizamos na elaboração deste trabalho.

¹⁷ Recomendamos enfaticamente o livro supracitado de Griffiths que é, a nosso ver, um dos melhores textos introdutórios de física de partículas.

A matemática é uma teoria de estruturas formais e se aplicará a representações de fenômenos físicos que apresentem uma *estrutura similar* e, no melhor dos casos, isomorfa (Grande, Cap.3, 2011). Em geral, não é possível obter um isomorfismo entre um domínio matemático e um determinado domínio da realidade física, visto as estruturas matemáticas serem muito mais *ricas* do que as estruturas físicas que queremos descrever. Por exemplo, não há nada na nossa realidade empírica que nos remeta a um cardinal transfinito fortemente inacessível ou a seu fatorial de Hausdorff. Para fixar as ideias, tomemos um exemplo.

Seja X um conjunto de corpos cujos pesos possamos obter e comparar por meios empíricos usuais. Assuma que $X^* = \mathbb{R}$, de modo que “ \leq ” e “ $+$ ” representem, respectivamente, as relações usuais de ordem e a operação binária de adição entre números reais. Denote por Σ a estrutura matemática $\langle X^*, +, \leq \rangle$ e, por Σ^* , a estrutura $\langle X, \oplus, \leq \rangle$ - sendo “ \oplus ” a operação de composição de pesos e “ \leq ” a relação de comparação de pesos.

Associamos números a corpos através de um homomorfismo¹⁸ $\varphi: X \rightarrow X^*$ que satisfaz a:

- i. $x \leq y \rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$;
- ii. $\varphi(x \oplus y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

Neste exemplo assaz trivial, a estrutura dos números reais é utilizada para dizer algo a respeito da nossa física de conjuntos de corpos cujos

¹⁸ Para fixar as ideias, sejam A e A' dois anéis. Um anel é um conjunto não vazio munido de duas operações binárias, e.g., “ $+$ ” e “ \cdot ” (ou “ $*$ ” e “ \circ ”) chamadas, respectivamente, de *adição* e *multiplicação*, e que satisfaz a um conjunto de axiomas (Gonçalves, pp. 34-35, 1999). Denotaremos um anel por $\langle A, +, \cdot \rangle$ ou $\langle A', *, \circ \rangle$. Resumidamente, um anel é um conjunto não vazio munido de duas operações binárias e que satisfaz a um grupo de axiomas.

Um homomorfismo de anéis nada mais é que uma função $\varphi: A \rightarrow A'$, para $\langle A, +, \cdot \rangle$ e $\langle A', *, \circ \rangle$, que satisfaz a:

$$\begin{aligned} \forall a \forall b \in A \\ \varphi(a + b) &= \varphi(a) * \varphi(b) \\ \varphi(a \cdot b) &= \varphi(a) \circ \varphi(b) \end{aligned}$$

Se φ for bijetivo, será chamado de *isomorfismo*. Tal definição se estende naturalmente a outras estruturas algébricas como a de corpo. Para o caso da estrutura algébrica de grupo, teremos apenas uma operação binária. No exemplo acima ligado a corpos físicos, o homomorfismo também preserva a estrutura de ordem.

pesos podem ser medidos. Mais precisamente, podemos afirmar que, na composição de pesos, adicionamos os números referentes aos pesos dos corpos e que se o corpo x tem o seu peso igual ou menor ao de y , então, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. E no caso dos diagramas de Feynman, o que ocorre? Veremos isso nas próximas subseções.

6.3.2 Diagramática geral – uma abordagem informal

Para compreender o contexto geral da utilidade dos diagramas de Feynman, seria necessário elaborar uma discussão bastante aprofundada de teoria¹⁹ das perturbações em mecânica quântica de campos²⁰, o que não se insere na nossa²¹ proposta. Aliás, sequer há métodos matemáticos exatos para resolver as equações que descrevem os sistemas físicos do ponto de vista da eletrodinâmica quântica, como nos dizem Peskin & Schroeder (p. 5, 1995):

A notícia ruim é que, mesmo para os processos mais simples da QED, a expressão exata para M não é conhecida. Realmente, este fato não deveria vir como uma surpresa, desde que, mesmo na mecânica quântica não relativística, problemas de espalhamento raramente podem ser resolvidos de modo exato. O melhor que se pode fazer é obter uma expressão formal para M como uma série de perturbação (...).

De maneira bastante simplificada, dado o operador de energia H de um sistema físico de campos $\{\phi_i\}$, $H = H_0 + \lambda H_I$, de modo que o primeiro termo à direita da expressão represente o sistema livre de interações,

¹⁹ Ver também (Schweber, Chap.14, 2005) & (Mattuck, pp. 52-54, 1992) & (Sakurai & Napolitano, Chap.5-6, 2013)

²⁰ Recomendamos o excelente texto de divulgação científica escrito em linguagem bem humorada do próprio criador dos diagramas, *QED – The strange theory of light and matter* (Feynman, 1985) e o ótimo artigo de Daniel (2006) para uma introdução bastante didática à mecânica quântica de campos e aos diagramas de Feynman.

²¹ A elaboração de um cálculo explícito e detalhado usando os diagramas de Feynman requereria a utilização de um dicionário que traduzisse cada elemento de um diagrama em uma expressão matemática. Essas expressões comporiam uma equação que nos permitiria calcular a amplitude de espalhamento. O leitor pode encontrar cálculos explícitos em Schweber (pp. 487-500, 2005), além de (Aguíllar, pp. 5-8, 2018).

sendo que todas as interações estão contidas no termo λH_i (para o parâmetro λ), o objetivo do físico de partículas é obter: $\langle \Omega | T \{ \phi_i \} | \Omega \rangle$. Tal termo representa o valor esperado do sistema no estado $|\Omega\rangle$ - sendo T , o operador de *ordenação temporal*. A obtenção de $\langle \Omega | T \{ \phi_i \} | \Omega \rangle$ requeria algumas páginas de cálculos e uma compreensão maior da física e matemática subjacente à teoria quântica de campos e, por isso, apenas deixaremos referências. Para uma abordagem completa, ver (Schweber, Chap.14, 2005) e, para uma *dedução heurística* da expressão, indicamos (Gomes, pp. 199-204, 2002).

O termo $\langle \Omega | T \{ \phi_i \} | \Omega \rangle$ pode ser expandido através de uma série de funções a um parâmetro, no caso, λ . De maneira bastante esquemática e apenas a título de ilustração, escreva $f^j(x_i)$ para o j -ésimo termo da expansão em série de funções a seguir²²:

$$\langle \Omega | T \{ \phi_i \} | \Omega \rangle = f^0(x_i) + \lambda f^1(x_i) + \text{termos de ordem } \lambda^2$$

No caso geral, cada $f^j(x_i)$ pode ser calculado com o auxílio de um teorema chamado de *Teorema de Wick* - ver (Mattuck, pp. 362-367, 1992) & (Kaku, pp. 151-156, 1992) & (Gomes, pp. 199-211, 2002). O teorema de Wick permite relacionar os elementos de cada termo da série com diagramas de um modo natural. Todavia, a elaboração de tal relação

²² Note que não estamos especificando as variáveis x_i , nem exibindo a forma de cada termo da série para evitar detalhes técnicos que não acrescentariam nada à nossa exposição. Poderíamos colocar o problema da seguinte maneira, a nosso ver, mais intuitiva. Tomemos por S a matriz de espalhamento e, por $|i\rangle$ e $|f\rangle$, os estados inicial e final do sistema físico, de modo que $\langle f | S | i \rangle$ represente a amplitude M_{fi} . Podemos escrever: $\langle f | S | i \rangle = \langle f | S^0 | i \rangle + \langle f | S^1 | i \rangle + \langle f | S^2 | i \rangle + \langle f | S^3 | i \rangle + \dots$

Lembre-mos de que a amplitude é o termo que nos permite calcular a seção de espalhamento e de que não existem soluções exatas para $\langle f | S | i \rangle$, mesmo para casos mais simples e, também, de que a série acima é obtida por métodos de teoria das perturbações. Façamos, então, uma analogia. Seja a função $f(x)$ dada pela seguinte série:

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots$$

Note que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$. Ora, para valores pequenos de x , os dois primeiros termos forneceriam uma boa aproximação para $f(x)$. Entretanto, na mecânica quântica de campos, muitas séries divergem, o que dificulta a justificação matemática da teoria. Todavia, em muitos casos, bastam os primeiros termos da série para se obter um valor adequado para $\langle \Omega | T \{ \phi_i \} | \Omega \rangle$.

requereria exercícios algébricos assaz extensos. Por outro lado, podemos exibir um exemplo simples para o elétron não relativístico que retiramos de (Lopes, pp. 854-857, 2005) e que será explicado de maneira informal. Para o caso relativístico, haveria mais diagramas e a abordagem requereria inúmeras informações adicionais. A título de ilustração, teríamos dois diagramas para o primeiro termo da série do propagador de Feynman, um relacionado ao elétron e outro ao pósitron (Bassalo, p. 159, 2006). Lembremo-nos de que os diagramas ganham importância em mecânica quântica de campos e que não é no contexto não relativístico que mostram o seu valor heurístico. Feitas essas observações, sigamos com o exemplo.

6.3.3 Exemplo prático

Suponha que um elétron se propague de um ponto A até o ponto B em um intervalo de tempo Δt – figura 6. Na formulação da mecânica quântica por integrais de trajetórias, soma-se a amplitude de probabilidade para cada trajetória possível do deslocamento entre os dois pontos – ver (Feynman & Hibbs, pp. 28-39, 2005) & (Schulman, pp. 3-8, 2005).



Figura 6

Dado o operador de energia $H = H_0 + V$, sendo H_0 o termo referente à partícula livre e V uma *pequena* perturbação, a expressão que nos dá a amplitude de espalhamento do elétron é $K_f(2,1)$ – (Lopes, p. 855, 2005);

$$K_f(2,1) = K_0(2,1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(2,3)V(3)K_0(3,1)d^3x_3 + \dots$$

$K_f(2,1)$ recebe o nome de propagador²³ de Feynman para a partícula (no caso, um elétron). Propagadores, como foi dito anteriormente, são dados por um tipo de função matemática chamada de *função de Green*. Esse tipo de função nos permite obter soluções para a equação de Schrödinger i.e., conhecido o propagador, obtém-se a solução para a equação de Schrödinger - ver (Schulman, Chap.10, 2005) para uma discussão análoga à nossa, mas com os detalhes matemáticos.

À expressão acima, associamos uma família de diagramas. Na seguinte figura, por exemplo, o termo à esquerda representa a amplitude total de espalhamento, enquanto cada um dos seguintes termos representa um membro da série. Em geral, as representações diagramáticas são muito mais complicadas do que esta. Façamos, então, algumas observações sobre o que foi feito aqui.

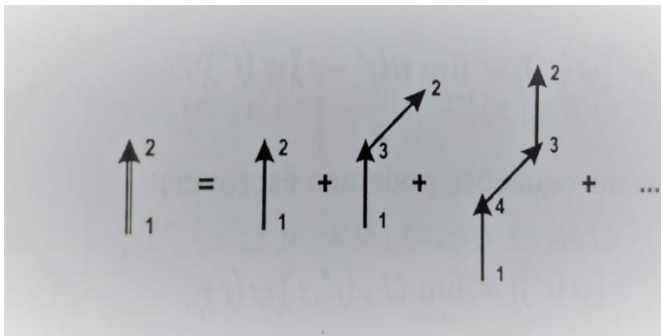


Figura 7

Fonte: (Lopes, p. 857, 2005).

²³ De modo didático, podemos escrever o propagador K para uma partícula do seguinte modo para o caso não relativístico: $K = K_0 + K_0VK$, sendo V um potencial e K_0 o valor inicial de K . Tal equação, sob condições matemáticas adequadas, pode ser escrita do seguinte modo: $K = K_0 + K_0VK_0 + K_0VK_0VK_0 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (K_0V)^i K_0$. O primeiro termo se refere à propagação da partícula sem espalhamento, o que nos dá precisamente o primeiro diagrama da figura 7 e, de modo análogo, poderíamos obter todos os demais diagramas.

6.4 Observações

Primeiramente, parece-nos claro que os diagramas não podem ser representações²⁴ da realidade física, visto o conceito de trajetórias espaço-temporais bem definidas ser destituído de sentido em mecânica quântica. Além disso, em um diagrama de Feynman, há menção explícita a partículas virtuais, as quais não podem ser observadas. Caso tais partículas não existam, os diagramas estariam representando o que? Algo inexistente? Neste caso, é imediato que os diagramas de Feynman não poderiam ser uma representação adequada de algum recorte da nossa realidade empírica. Para o caso de as partículas virtuais existirem, não há problema em se representar algo inobservável. Entretanto, mesmo nesta situação, não é possível contornar o problema oriundo do tratamento matemático dado à mecânica quântica de campos por Dyson, o qual permite relacionar diagramas a expressões matemáticas. Mais precisamente, Dyson (1952) provou que muitas séries utilizadas em QED divergem, apesar de os seus primeiros termos serem de utilidade teórica para a obtenção de resultados assaz satisfatórios. Grosso modo, não pode haver um homeomorfismo entre uma estrutura matemática que prevê resultados infinitos e um *recorte da realidade* física que é sempre de natureza finita. Isso exclui a possibilidade de diagramas de Feynman serem algum tipo de representação estrutural da realidade empírica - note que Feynman tinha razão na citação com que abrimos o nosso artigo. Teçamos, então, as nossas conclusões.

²⁴ Citado por Würtrich, James R. Brown tem a seguinte opinião, i.e., “Então, o que está sendo visualizado? Eu acho que a resposta é simples: diagramas de Feynman são representações geométricas de funções de probabilidades (...). Eles não são retratos de fenômenos (...) O diagrama de Feynman representa (frequentemente de modo brilhante) uma função matemática que está relacionada a um processo físico. Nós vemos as linhas no diagrama; nós não visualizamos o processo físico por si mesmo, nem qualquer tipo de versão abstrata dele”. Resumidamente: os diagramas ajudam a obter as amplitudes do tipo M_k , mas não exercem qualquer papel ontológico na representação. Mais precisamente, os diagramas têm valor epistemológico, não ontológico.

6.5 Conclusões

Descrever as interações entre partículas através de palavras seria uma tarefa absurdamente ingrata e, mesmo para o caso das equações, a situação ainda é complicada, visto haver uma quantidade enorme de termos em cada passo da expansão de uma série perturbativa de funções para ordens elevadas. Assim, é mais fácil raciocinar com o uso de diagramas. O bloco fundamental de um diagrama é o vértice, onde são representadas as interações. Sempre haverá uma seta chegando ao vértice e outra saindo. Embora, possa-se dizer que “as interações são representadas nos vértices”, os traços não representam as trajetórias reais de partículas no espaço-tempo. De modo mais preciso, os vértices representam a ordenação temporal no sentido de uma partícula ser criada, aniquilada ou trocada e apenas nesse sentido relacional.

Em suma, elaboramos uma discussão a respeito do raciocínio diagramático em física quântica e, dada a complexidade técnica da mecânica quântica de campos, em especial, da eletrodinâmica quântica, não seria possível abordar o tema de uma maneira matemática em poucas linhas. Analisamos, brevemente, a história da criação dos diagramas e tentamos mostrar que o seu papel não é o de representar um fenômeno físico, mas de auxiliar o físico a encontrar as expressões corretas que descrevem os processos de espalhamento. É importante que fique claro que os diagramas por si só não produzem resultados numéricos, mas apenas ajudam os cientistas a encontrar os termos correspondentes a expressões em uma série de funções. Encontrados tais termos, ainda é preciso montar uma equação e resolvê-la.

Apêndice: o pensamento simbólico em Granger

7.1 Introdução

A matemática não é somente uma linguagem. Ela envolve o tipo de constituição de objetos de uma ciência empírica - Granger (p. 33, 1995).

Consideramos Granger um grande pensador e a sua filosofia é um nicho rico de exemplos e de inspiração para todos que se sentem atraídos pelo pensamento formal. Usaremos este apêndice para analisar criticamente o seu conceito de *conteúdo formal*.

Os objetos do nosso dia a dia parecem ser todos dotados de matéria e forma, ou melhor, são percebidos desta maneira por nós. Dado que tais objetos habitam o nosso espaço tridimensional, eventualmente, podemos associar a cada um deles um número específico que, de acordo com certas convenções, podemos chama-lo de volume. Todavia, quando falamos em elétrons, neutrinos e outras entidades da física de partículas, não é razoável dizer que os percebemos como objetos do nosso cotidiano, visto não termos qualquer intuição do que são sem um modelo carregado de teoria, forte aparato matemático e interpretações. Ninguém diz “a forma do elétron é esférica” ou algo similar. O movimento do elétron não relativístico é descrito pela equação de Schrödinger, e a própria palavra *movimento* denota algo abstrato, não um deslocamento no espaço com uma trajetória bem definida, dado que há restrições impostas pelo princípio de incerteza de Heisenberg.

Note que, já um pouco distante do seu empirismo radical do começo do século XX, o próprio Heisenberg nos dirá que:

(...) você quer construir as partículas elementares e, com elas, o mundo, a partir de alternativas, do mesmo modo que Platão tentou construir seus corpos regulares e o mundo a partir de triângulos. As alternativas não são mais materiais do que os triângulos do Timeu, de Platão (Heisenberg, p. 284, 2000).

Para o grande homem da física, o átomo, ou mais propriamente dito, o objeto da física moderna é uma construção matemática e deve ser entendido deste modo. Ora, a própria equação de Schrödinger não descreve ondas em nosso espaço físico, mas em um universo matemático multidimensional e, no caso geral, de dimensão infinita. Claro que estamos dotando a teoria de Schrödinger de uma interpretação, mas poderíamos nos deter apenas na equação ou no operador de Schrödinger no contexto da teoria dos operadores lineares (Gitman & Tyutin & Voronov, Chap.8, 2012).

Quanto a uma teoria matemática axiomática não interpretada, ela é dada por signos, axiomas, regras para a formação de termos, etc., mas também não se refere a algo específico, *a priori*. Entretanto, ela tem uma forma e reflete uma estrutura, embora teorias não interpretadas não sejam verdadeiras nem falsas. Para estruturas de primeira ordem e noções básicas de verdade, ver (Enderton, pp. 80-92, 1972), para uma introdução à teoria de modelos (Idem, pp. 147-164) e para a análise do método axiomático, (Wilder, Chap.2, 1965).

Costumamos dizer *aritmética de Peano* quando nos referimos aos números naturais (i.e., a uma teoria interpretada), todavia, é possível estudar as propriedades formais de um sistema axiomático sem nos referirmos a números, triângulos ou retas e, para isso, basta nos determos na estrutura formal da teoria. Hilbert eternizou esta visão na sua célebre frase: “Deveríamos ser capazes de dizer todas as vezes – ao invés de pontos, linhas retas e planos – mesas, cadeiras e canecas de cerveja” –

(Krause, p. 9, 2002). Entretanto, os termos *forma* e *conteúdo* não são exclusivos das ciências empíricas. Na música, por exemplo, podemos identificar a forma de uma peça de modo objetivo pela sua partitura, como veremos a seguir.

A primeira peça que Wolfgang Amadeus Mozart compôs foi o *Minueto e trio em sol maior K1* aos cinco anos de idade (Hildesheimer, p. 304, 1991) e cujos primeiros sete compassos constam na figura abaixo:

MINUET IN G

K 1 Wolfgang Amadeus Mozart

The image shows the first seven measures of the Minuet in G by Wolfgang Amadeus Mozart. The music is in G major (one sharp) and 3/4 time. The treble clef staff contains the melody, and the bass clef staff contains the accompaniment. The first measure starts with a treble clef and a G4 note, followed by a quarter rest in the bass. The second measure has a quarter rest in the treble and a G3 note in the bass. The third measure has a quarter rest in the treble and a G3 note in the bass. The fourth measure has a quarter rest in the treble and a G3 note in the bass. The fifth measure has a quarter rest in the treble and a G3 note in the bass. The sixth measure has a quarter rest in the treble and a G3 note in the bass. The seventh measure has a quarter rest in the treble and a G3 note in the bass.

Figura 1

A leitura de uma partitura pode proporcionar, ao músico treinado, um deleite distinto do que proporcionaria ao leigo - talvez, este sinta certo desgosto ou desprezo ao se deparar com um trabalho carregado de símbolos como uma rapsódia de Liszt. O músico pode reconhecer, de imediato, a forma da composição acima, sendo capaz de imaginá-la, ou seja, de *ouvi-la* ao pensar em cada nota e figura rítmica em sua mente. Estamos nos referindo a uma peça simples feita por um dos maiores gênios da humanidade, porém, quando criança. É bem possível que poucos consigam *ouvir* a rapsódia húngara número 12 de Liszt apenas lendo a sua partitura. Reproduzimos, a seguir, alguns compassos desta belíssima obra.

Figura 2 - Rapsódia húngara Nº12

Suponha, agora, que transcrevamos uma partitura qualquer para outra tonalidade arbitrária. Na partitura, as notas serão deslocadas verticalmente e haverá alterações nos sinais referentes aos sustenidos e bemóis na armadura da clave. Todavia, a forma da partitura será exatamente a mesma. Podemos dizer que o seu “conteúdo” mudou, dado que cada marca na partitura se referirá a uma nota distinta daquela da tonalidade original. Assim, o seu conteúdo nada mais será do que a nota que o signo representa na partitura. Por exemplo, na partitura de Mozart, a peça começa com uma figura rítmica com duas colcheias, sendo a primeira nota um si, e a segunda, um sol – ver figuras 3, 4 e 5 para a notação musical.














Figura	Pausa	Nomenclatura	Número de representação
		Semibreve	1
		Mínima	2
		Semínima	4
		Colcheia	8
		Semicolcheia	16
		Fusa	32
		Semifusa	64

Figura 3: figuras rítmicas

CLAVES MUSICAIS



Figura 4

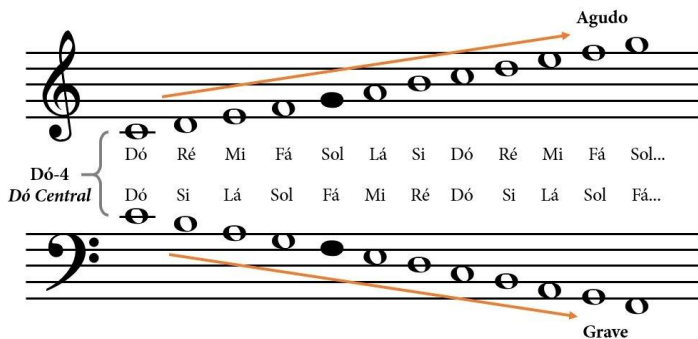


Figura 5

Podemos afirmar que, visto as figuras rítmicas serem invariantes por mudanças de tons, elas fixam a forma de qualquer composição musical. E fixada a tonalidade e especificadas as claves, temos uma descrição formal completa de qualquer música. Parece-nos que os conceitos de forma e conteúdo na música, apesar de interligados, são dotados de particularidades bem definidas e delimitadas. Já na matemática, Granger (1982) elaborou um conceito chamado de *conteúdo formal* que será o ponto central de nossa crítica. Para o filósofo francês, o objeto e a operação matemática são solidários uns dos outros, uma dependência mútua que é possível por um conceito de dualidade.

Primeiramente, seguindo Granger, pressupor que algo tenha um tipo de conteúdo é supor que nos revele informação de um modo ou de outro. No caso da música, isso fica claro quando pensamos em um signo que nos remete a uma nota específica. E quanto à *forma*, é razoável aceitarmos que *é a moldura invariante dentro da qual o conteúdo funciona como veículo de informação* (Granger, p. 360, 1982). A questão que o filósofo francês se coloca concernente ao seu termo (*conteúdo formal*) é a seguinte: “como, neste caso, pode esta forma por si mesma carregar informação através da qual o seu próprio conteúdo seria revelado? Este é o paradoxo” (Idem, Ibidem). Dito de outro modo, como pode a forma por si mesma nos prover de algum conteúdo? Granger utilizará alguns exemplos como base para a sua argumentação. Vejamos um deles, o qual foi retirado da termodinâmica – para detalhes técnicos, ver (Resnick & Halliday, Cap.23&25, 1966) & (Huang, Chap.1, 1963).

7.2 Forma e conteúdo na física

Granger cita a expressão $PV = kT$, que relaciona, respectivamente, pressão P , volume V e temperatura T , sendo k a constante de Boltzman.

Nela, o termo T funcionaria como conteúdo, visto se referir a um dado empírico, mas,

(...) aparecerá como forma na perspectiva de uma teoria cinética onde ela é definida como a energia cinética média de um conjunto de moléculas, ou de novo, na perspectiva dos fundadores da termodinâmica, onde é introduzida como um fator de integração da quantidade de calor (Granger, p. 364, 1982).

Pressão, temperatura e volume são quantidades mensuráveis e definidas experimentalmente, o que nos diz que a termodinâmica é uma teoria fenomenológica e, como sabemos, surgiu diretamente de generalizações a partir de experimentos. Além disso, também é correto afirmar que as leis da termodinâmica obtiveram a sua justificação na mecânica estatística (Huang, Chap.3, 1963). Afirmamos ser tautológico dizer que um termo arbitrário numa expressão como $PV = kT$ da física possa ser visto como *forma*. Ora, isso se aplica a qualquer x , y ou z em uma equação. A diferença é elementar. Sabemos que $z = yx$ é a equação de uma superfície em \mathbb{R}^3 . Porém, se interpretamos tal equação por $f = ma$, de modo a instanciar a segunda lei de Newton para o movimento de uma partícula em uma dimensão (assumindo, sem perda de generalidade, m – constante), é razoável dizer que a expressão se referirá, então, a algo com *conteúdo*. Ou seja, o que Granger faz no caso de T é só um jogo de palavras, nada mais. Mas é importante que falemos um pouco mais disso.

Temperatura, pressão e volume se relacionam através de uma equação de estado. A ideia de se ter este tipo de equação (i.e., uma expressão da natureza $f(P, V, T) = 0$) é a de reduzir o número de variáveis independentes a dois. A expressão $PV = kT$ se originou da lei de Boyle, a qual pode ser escrita do seguinte modo $\frac{PV}{N} = k$, sendo N o número de moléculas. É costume escrever a equação de estado da seguinte maneira $PV = NkT$ ou $PV = nRT$, sendo n o número de mols e R a constante universal

dos gases perfeitos. Note também que esta expressão se refere a um conceito idealizado de gás dito *ideal* ou *perfeito* e que o termo *número de moléculas* é sempre estatístico.

Do lado da empiria, à temperatura de um sistema é sempre possível associar o termo *conteúdo*. Após usarmos um signo para denotar uma grandeza física, e.g., T , evidentemente, podemos falar dela formalmente no contexto de uma abordagem sintática. Parece imediato que essa discussão não tem absolutamente nada a ver com *conteúdo formal*, mas apenas com a descrição estatística da realidade e de como a matemática se aplica a ela. Ora, como grande parte dos conceitos da termodinâmica são compreendidos de maneira adequada em termos moleculares, temos, inevitavelmente, uma descrição estatística dos seus conceitos, dada a quantidade elevada de átomos, moléculas e partículas, em geral. Os conceitos da estatística (valores médios, etc.) são denotados por expressões matemáticas assim como qualquer outro que figure em uma teoria científica e, assim, refletirão uma forma, precisamente aquela das equações - o que é mero truísmo, dito de outra maneira.

Parece-nos imediato que, mesmo para grandezas físicas às quais não associamos uma interpretação estatística imediata, e.g., campo magnético, corrente elétrica, etc., é sempre possível se referir a elas de duas maneiras: a. denotam um conteúdo quando interpretadas; b. expressam uma forma. No caso do campo magnético \vec{H} , ele pode ser introduzido como o rotacional do vetor potencial magnético \vec{A} , i.e., $\vec{H} = \nabla \wedge \vec{A}$. Na equação de Schrödinger, por exemplo, não há menção direta a \vec{H} , mas apenas a \vec{A} . Também poderíamos desenvolver a análise vetorial do ponto de vista puramente formal sem qualquer menção a campos e potenciais, o que instanciará apenas uma abordagem formal. Por outro lado, podemos identificar determinados termos matemáticos com objetos físicos como no caso do campo magnético.

Voltando ao exemplo de Granger, podemos construir uma escala absoluta de modo empírico, entretanto, o seu conceito adquirirá significado pleno na teoria cinética dos gases (Huang, p. 6, 1963). Em uma escala e do ponto de vista relacional, diríamos que a temperatura tem uma forma, porém, quando lido nela o seu valor, que nos fornece um conteúdo (assim como uma nota de uma partitura ao ser ouvida). Vejamos, agora, o caso da temperatura ser tomada como variável de integração.

Quando escrevemos a expressão $dQ = c_p dT$ para a diferencial da quantidade de calor dQ , capacidade calorífica à pressão constante c_p , e a diferencial da temperatura dT , podemos falar da relação formal entre os termos. Sabemos que tal expressão se origina naturalmente de $\Delta Q = c_p \Delta T$. Agora, olhemos para o caso de um termo dotado de significado físico e que aparece como fator de integração, e.g., na expressão para a variação de entropia ΔS em: $\Delta S = c_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1}$. Neste caso, o físico *olha* para dT como se referindo à temperatura, não apenas para uma variável formal com relação à qual se elabora a integração. Claro que, quando se efetua uma integração, segue-se uma regra de cálculo. Entretanto, seria desarrazoado achar que dT é apenas um símbolo formal na integral, mas que, por alguma espécie de magia, volta a ter significado conteduístico em $c_p \ln \frac{T_2}{T_1}$.

Os equívocos de Granger sobre forma e conteúdo em termodinâmica parecem-nos estar relacionados com outra confusão, no caso, referente à teoria das probabilidades. Mais precisamente, Granger nos diz que:

O sistema operacional determina uma espécie de objetos: variáveis e seqüências aleatórias. Um desenvolvimento axiomático nos permitiu especificar, não sem dificuldade, a dualidade da operação e do objeto neste domínio, e a trazer à luz as dificuldades que cobrem o conteúdo formal, isto até tornar as propriedades sintáticas correlatas com intuições mais ou menos precisas de aleatoriedade. A definição de probabilidade como uma medida em

um espaço abstrato de medida com uma estrutura de borelianos constituiu o passo decisivo (Granger, pp. 376-377, 1982).

Historicamente, o primeiro trabalho ligado à teoria das probabilidades de que temos conhecimento foi escrito pelo matemático italiano Girolamo Cardano no contexto de jogos de azar no século XVI. E neste caso, se seguirmos a separação entre forma e conteúdo a que tanto se prende Granger¹, é coerente dizer que surgiu em um contexto amplamente conteudístico e diretamente aplicado a jogos, e não como uma teoria sobre variáveis e sequências aleatórias - algo que apenas floresceu no futuro. Quanto à axiomática, ela só se fixou com o passar dos anos e dos seus desenvolvimentos subsequentes, como seria de se esperar. *Mutatis mutandis*, tudo o que foi dito sobre a termodinâmica se aplica à teoria das probabilidades. De maneira muito mais precisa, podemos lidar com a matemática do ponto de vista do estruturalismo sem recorrer a metáforas e analogias que pouco acrescentam.

7.3 Paradigma e tema

Dois conceitos essenciais para o trabalho de Granger são os de *paradigma* e *tematização* (ou *tema*). Para compreendê-los, utilizaremos dois exemplos. O primeiro deles se referirá à passagem do conhecimento aritmético para o algébrico (conforme visto no terceiro item, ou subseção, da seção 3.2.). O segundo estará ligado à definição de funcional linear.

Referente à seção 3.2., discutimos o problema de encontrar dois números cuja soma era 29 e cuja diferença era 3. A partir dele, ilustramos como se dá o processo da abstração da aritmética elementar rumo à

¹ No fundo, tendo em mente a justificação da sua tese concernente ao conceito de conteúdo formal, Granger visará substituir a máxima kantiana: *pensamentos sem conteúdos são vazios; intuições sem conceitos são cegas por sua própria máxima, o pensamento sobre operações sem objetos é estéril; o pensamento sobre um objeto sem sistema de operações é opaco* (Granger, p. 152, 1990) que é, no melhor dos casos, uma tautologia inócua.

álgebra abstrata. Mais precisamente, podemos resumi-lo da seguinte maneira:

- i. Acrescenta-se um conjunto de variáveis para lidar com o problema aritmético original, através do qual uma estrutura é explicitada;
- ii. No seio da estrutura explicitada, as letras para as variáveis já não se referem apenas aos números do problema original, mas a qualquer número inteiro (a princípio);
- iii. Obtém-se uma estrutura mais ampla que pode ser estudada pela teoria de sistemas lineares.

O processo acima de abstração, em que os signos introduzidos já não se referem aos seus objetos originais, ilustra o que Granger chamará de *abstração paradigmática*, um processo *vertical*. Parece razoável usar a palavra *vertical*, dado que se parte de um contexto mais pobre para outro mais rico – ou, dito de modo metafórico, de um contexto *menor* para outro *mais amplo*. Tomemos, agora, um segundo exemplo e relacionado ao conceito de *tematização*.

A operação de integração pode ser utilizada para definir um funcional linear em um espaço de funções. Mais precisamente, seja Ω o conjunto de todas as funções reais de uma variável que são integráveis no sentido de Riemann. Defina o objeto $I: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como o seguinte funcional linear:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

O processo pelo qual uma operação de integração é vista como um objeto de um espaço vetorial ilustra o que é chamado por Granger (inspirado em Cavaillès) de *tematização*. Mais precisamente, sobre o paradigma e o tema, temos:

O “paradigma”, esvaziando dos enunciados de seus conteúdos estabilizados em “variáveis” (é “o momento da variável”, diz Cavallès), fazia aparecer uma forma operando sobre esses conteúdos; o “tema” toma então essa forma como ponto de aplicação de um novo sistema operatório: as adições e multiplicações da aritmética tornam-se entidades mais gerais submetidas às leis de grau superior de uma álgebra “universal”; a operação de integração torna-se a entidade: “funcional linear”, objeto de uma análise nova. A verdadeira oposição é aquela do par operação/objeto - (Granger, p. 153, 1990).

Note, mais uma vez, que o nosso primeiro exemplo ilustra a generalização e extensão de uma teoria, como mostramos na seção 3.2. Com relação ao segundo exemplo, tem-se a definição de um objeto matemático a partir de uma operação. Vejamos isso um pouco melhor através de um exemplo trivial.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} . Tome, agora, o conjunto de todas as transformações lineares de V em \mathbb{R} , i.e., $V^* = \{\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}; \varphi \text{ é linear}\}$. Definidas as operações de adição e produto por escalar de modo padrão em V^* , teremos um novo espaço vetorial, no caso $\langle V^*, \mathbb{R} \rangle$ cuja dimensão será exatamente a mesma de V ; V^* recebe o nome de² *dual de V* . Nesse sentido, um funcional poderá ser visto como um vetor, i.e., um objeto de um espaço vetorial. No caso de $l(f)$, estamos trabalhando em um espaço de funções, um conjunto mais sofisticado do que o espaço de dimensão finita V do nosso exemplo, todavia, a ideia de se definir um objeto a partir de uma operação é a mesma. Acreditamos que os conceitos de paradigma e tematização estejam claros. Sigamos com o conceito de conteúdo formal de Granger.

² Referente aos funcionais lineares, o conceito de dualidade é, para Granger, *um caso especial de importância singular*, dado que *inspira a escolha da metáfora matemática da “dualidade” para designar o fenômeno geral da epistemologia* (Granger, p. 366, 1982) - ver também (Granger, pp. 261-262, 2007) para uma discussão mais elaborada do termo *dualidade*. Existem inúmeros conceitos de dualidade em matemática e que são utilizados em contextos distintos. Fixado o contexto matemático, *dualidade* é um termo preciso, todavia, dito de modo genérico, não o é. E quando um conceito técnico é retirado de seu contexto preciso e utilizado metaforicamente em filosofia, ele pode ficar completamente descaracterizado e funcionar como uma metáfora vaga.

7.4 Conteúdo formal – do grau zero da relação forma-conteúdo ao surgimento do objeto matemático.

Poderia a expressão “conteúdo formal” ser outra coisa senão um daqueles oximoros que os filósofos fabricam de maneira voluntária? (Granger, p. 360, 1982).

Por questões didáticas, dividiremos esta seção em duas subseções. Na primeira, falaremos do grau zero da relação forma-conteúdo e, na segunda, do objeto matemático de acordo com Granger.

7.4.1 Grau zero da relação forma-conteúdo e o cálculo proposicional

Para entendermos como surge o conceito de conteúdo formal na filosofia de Granger, é importante discutir o papel exercido pelo cálculo proposicional clássico em sua argumentação, ao qual nos referiremos apenas por CPC – ver (Enderton, pp. 11-66, 1972) para uma análise matemática do tema. Começemos com a seguinte citação:

O cálculo proposicional é, de fato, a apresentação das regras mais gerais governando o pensamento sobre um objeto. Os seus símbolos, como é sabido, podem ser interpretados como representando enunciados distinguidos apenas como³ “verdadeiros” ou “falsos” ou como classes de objetos de qualquer tipo distinguidos como preenchidos ou vazios (Granger, pp. 367-368, 1982).

Para o filósofo francês, CPC nos dá o conjunto mais geral possível de regras de acordo com as quais podemos pensar um objeto arbitrário. Note que CPC é completo, isto quer dizer que toda sentença verdadeira em sua linguagem admite uma demonstração. Além disso, é decidível, o que significa que existe um procedimento mecânico finito para checar a

³ É bem possível que Granger tenha sido influenciado por Wittgenstein, como analisa Giannotti (p. 16, 2008), dada a relevância atribuída ao CPC pelo pensador francês. Entretanto, deixamos tal discussão para os interessados no tema.

veracidade ou falsidade de cada sentença formulada em sua linguagem. Desta maneira, podemos dizer que o seu universo se dividirá efetivamente em *verdadeiro* ou *falso*. É a partir do CPC que Granger definirá o *grau zero de conteúdo*, i.e.,

este invariante não tem descrição; ele aparece, por assim dizer, apenas como um vazio, se alguém tenta, em vão, destaca-lo do sistema de operações. O seu conteúdo é o complexo de regras que definem este sistema (...) (Idem, p. 368).

O que ele quer dizer é simples: CPC é completo e decidível, logo, verdade e demonstrabilidade são conceitos inseparáveis. Evidentemente, é fácil dar uma caracterização simples do cálculo de proposições e evitar metáforas vazias do tipo *este invariante não tem descrição*. Temos aqui a utilização de outro termo matemático fora de seu contexto preciso, no caso, *invariante*.

Finalmente, a respeito da consistência, Granger nos dirá que *em um sistema contraditório de operações o mesmo objeto pode ser afirmado e não afirmado, e por essa razão cessa de exercer a regra invariante requerida pela função elementar do pensamento* (Idem, *Ibidem*). Como é fácil dar um modelo para CPC através das tabelas de verdade, ele será consistente também. Logo, CPC será completo, consistente e decidível. É importante analisar essas citações através de algumas notas antes de seguirmos.

- i. Afirmações do tipo *as regras mais gerais governando determinado objeto* tendem a ser falaciosas ou, efetivamente, refutáveis. Não é difícil refutar Granger utilizando os seus conceitos de forma e conteúdo e, para isso, basta tomarmos o caso dos cálculos proposicionais paraconsistentes C_n ($1 \leq n \leq \omega$), (da Costa, pp. 169–283, 2008). Os sistemas de cálculo proposicional paraconsistentes permitem trabalhar com proposições mais gerais do que aquelas do CPC clássico. Neles, é possível lidar com proposições

contraditórias, se preferir, proposições com formas mais gerais e que expressam *conteúdos contraditórios*. O cálculo C_1 , a título de ilustração, é consistente (da Costa, p. 272, 2008);

- ii. Granger utiliza a expressão *sistema contraditório de operações*. Ora, isso é destituído de qualquer sentido em uma ciência formal: não há sistemas contraditórios de operações. Parafraseando Wolfgang Pauli⁴, *isso não está certo, isso sequer está errado*. O que não se deseja é que uma proposição p e a sua negação $\sim p$ sejam demonstráveis em um sistema lógico, o que não tem a menor relação com a existência de regras contraditórias. Ainda sobre os cálculos paraconsistentes, $(C_n, 1 \leq n \leq \omega)$, apesar de não serem decidíveis por matrizes finitas, são decidíveis. (Idem, pp. 272-273).

Analisadas as citações anteriores, podemos sumarizar a utilidade de CPC para o pensamento de Granger da seguinte forma: o grau zero da relação forma-conteúdo surge no contexto cálculo proposicional clássico em que não existe uma separação clara entre conteúdo e forma, visto CPC ser completo e decidível.

7.4.2 Objeto matemático

Começemos esta subseção com a seguinte citação

1.O objeto matemático é primeiramente caracterizado pela aparição de “conteúdos formais”, ausentes da lógica. Essa aparição de “conteúdos”, que não tem entretanto sua origem nos *dados* do sensível, implica na perda da adequação perfeita *objeto/operação*: perda da decidibilidade universal através de um algoritmo finito, que se manifesta desde que o objeto adquire uma especificação, desde o cálculo de predicados; perda mais decisiva, da completude e da possibilidade de estabelecer a não-contradição que sobrevém com a aparição do número numa aritmética elementar. “Conteúdo” significa aqui propriedades do objeto que escapam de uma certa maneira do sistema

⁴Apesar da citação acima pertencer ao folclore da física, Peierls nos conta, mais precisamente, que: “Muito recentemente, um amigo mostrou-me o artigo de um jovem físico que ele suspeitava não ser de grande valor, mas sobre o qual ele queria as opiniões de Pauli. Pauli comentou com tristeza: ‘Não está nem errado’ ” (Peierls, p. 186, 1960). Agradecemos aqui ao professor Osvaldo Pessoa Jr. pela observação contida nesta nota.

operatório demonstrativo, ainda que o objeto em questão tenha sido introduzido como correlato do sistema operatório (Granger, p.155, 1990).

Segundo Granger, CPC não é parte da matemática propriamente dita, visto haver uma correlação entre *demonstração* e *verdade* oriunda da completude e fixada pela decidibilidade da teoria. Bem, a lógica de primeira ordem é completa, mas indecidível, assim, apesar de toda sentença verdadeira poder ser, em princípio, demonstrada, não existe um procedimento algorítmico finito capaz de decidir se é verdadeira ou falsa. E a partir dela é que a matemática propriamente dita surgiria, i.e., da lógica clássica de predicados.

Podemos, então, afirmar que o *conteúdo formal* se refere a propriedades que escapam de uma delimitação operatória, ou seja, algo que não pode obtido por um procedimento algorítmico finito. Evidentemente, Granger nos quer sugerir que *a matemática começa com o infinito*, um *mote clássico*. Porém, existe uma enorme artificialidade referente ao que Granger pensa do CPC. Desde que ele instancia uma estrutura, mesmo que pobre, não deixa de ser uma estrutura e de poder ser estudada através de ferramentas matemáticas.

Note que Granger utiliza o termo “lógica” ao se referir à ausência de conteúdos formais. Claro que ele está se referindo apenas a CPC, porém, não existe uma demarcação entre o que é lógica e o que é matemática. Granger diz não querer elaborar uma demarcação, i.e., “O problema que nos interessa não é, na verdade, o de uma demarcação entre lógica e matemática”. Entretanto, isso soa completamente contraditório, visto ser impossível excluir CPC da matemática sem uma demarcação mínima e sem qualquer critério epistemológico. Sigamos com um exemplo para ilustrar o que temos em mente: o jogo de xadrez.

O xadrez tem regras fixas e uma estrutura bem delimitada que pode ser estudada matematicamente. E a *matemática do movimento das peças de xadrez* não deixa de pertencer ao rol da matemática por qualquer motivo que seja. Não importa se a matemática instanciada pelo jogo é pobre ou complexa, se envolve regras elementares ou axiomas de natureza não finitária (e.g., axioma da escolha), mas apenas que instancie uma estrutura matemática. Por ser um jogo computacional, o xadrez é de grande interesse de cientistas da computação. Na figura abaixo (Figura 6), um problema foi proposto a um programa de computador que joga xadrez, o Deep Thought, o qual cometeu o erro de tomar a torre negra e abrir espaço para a sua derrota. Bastaria ficar vagando com o seu rei para que a partida permanecesse empatada. Claro que já existem programas mais sofisticados que evitariam esse tipo de erro tolo. O ponto é simples: tudo aquilo que instancia uma estrutura pode ser estudado pela matemática ou, como diria um grande artista italiano: *Nenhuma certeza há onde não se possa aplicar uma das ciências matemáticas ou que não se relaciona com essas mesmas ciências matemáticas* - Leonardo da Vinci, Códice G, fólio 96.

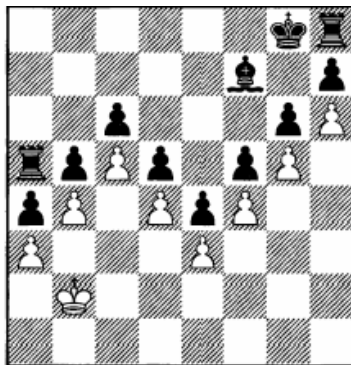


Figura 6

Fonte (Penrose, p. 106, 2000)

Voltando ao CPC, ele pode ser estudado do ponto de vista da álgebra, assim, instancia estruturas algébricas, mesmo que elementares – (Halmos & Givant, pp. 13-40, 1998). Apesar de Granger não estar interessado em criar uma demarcação, ele simplesmente exclui arbitrariamente o que considera inconveniente para as suas finalidades. Sigamos com outra citação.

2.(...) Do ponto de vista precedentemente enunciado, a matemática começaria portanto com o cálculo de predicados de primeira ordem e ganharia seu sentido pleno com a aritmética elementar submetida aos teoremas gödelianos (Granger, p. 155, 1990).

Aqui fica mais claro que a indecidibilidade é fundamental para o estabelecimento do conteúdo formal. Finalmente, o filósofo francês nos diz que “A produção matemática cria objetos certamente imaginários, mas que têm *conteúdos formais* não deriváveis da própria lógica” (Idem, p. 158).

Russell e Whitehead não visavam reduzir apenas a aritmética à lógica, mas toda a matemática. Apesar do *Principia* ser um marco na história da lógica e de importância fundamental para o seu desenvolvimento moderno, o projeto em si fracassou. Podemos afirmar que a matemática não é redutível à lógica. Por outro lado, Gödel exibiu uma sentença formulada na linguagem do *Principia* de Russell e Whitehead que é verdadeira, mas indemonstrável. Feitas essas observações, podemos afirmar que, para Granger, o conteúdo formal da matemática é aquele cuja aparição é marcada, *a priori*, pela indecidibilidade da lógica de primeira ordem e que começa a ter maior efetividade com a incompletude. Entendido o conceito de conteúdo formal, façamos, agora, as nossas conclusões e considerações finais.

7.5 Conclusões

Se entendermos por *conteúdo formal* aquilo que escapa à delimitação operatória, precisamos especificar as regras operatórias, caso queiramos ser minimamente precisos. De acordo com Gödel, é impossível demonstrar a consistência da aritmética de Peano por métodos finitários, todavia, utilizando métodos de indução transfinita, demonstra-se a sua consistência – (Smith, pp. 220-222, 2007). Neste sentido, o conteúdo formal da aritmética de Peano seria nulo, visto termos contornado os teoremas de Gödel. Evidentemente, Granger diria que não, visto tal demonstração não ser finitária. O ponto central é: qual a utilidade do conceito de conteúdo formal? Não vemos utilidade alguma. Quanto à utilização de conceitos precisos da matemática (dualidade, invariância, etc.) em contextos amplamente vagos, eles apenas obscurecem a argumentação e soam artificiais.

Encerremos com as seguintes notas:

- i. Não faz o menor sentido dizer que a matemática conteudística comece com a lógica clássica de predicados de primeira por não ser decidível. Ora, CPC é algebrizável e, assim, exhibe uma estrutura⁵. Existem também lógicas não algebrizáveis (Béziau, p. 167, 1998), mas que continuam exibindo uma estrutura formal. Além disso, existem inúmeros outros tipos de lógicas e não faz sentido tomar CPC e a lógica de predicados como parâmetros únicos e universais;
- ii. CPC não nos dá as regras mais gerais por meio das quais se pode pensar um objeto; também não é *a lógica estrito senso*, mas apenas um cálculo lógico. Existem caracterizações muito mais gerais do que é uma lógica⁶ – ver (da Costa & Krause, pp. 13-14, 2015).

⁵ Para uma discussão sobre a estrutura formal do CPC, vero artigo on-line “What is propositional classical logic?” de Béziau.

https://iphras.ru/uplfile/logic/logo8/Li8_Beziau.pdf

⁶ Recomendamos o artigo on-line de Béziau “What is a logic? Towards axiomatic emptiness”

https://iphras.ru/uplfile/logic/logo8/Li8_Beziau.pdf

- iii. Não existe apenas um conceito de dualidade em matemática. O termo *dualidade* é usado de modo amplamente genérico por Granger e, se admitido em um contexto vago, se aplicará de acordo com as conveniências e malabarismos linguísticos tal qual um *yin yang epistemológico*;
- iv. É mais coerente dizer que a matemática lida com estruturas, não com formas possíveis de objetos. Tome o caso da teoria de Meinong dos objetos inexistentes. Não é razoável dizer que são *objetos possíveis*, pelo menos no sentido de serem instanciados por alguma teoria da física. Entretanto, são construídos no contexto de uma linguagem lógica que, de um modo ou de outro, instanciará uma estrutura (Priest, Chap.14, 2016);
- v. Para a filosofia da matemática, consideramos relevantes os conceitos de paradigma e tema, apesar de não terem sido trabalhados com detalhes, até onde sabemos;
- vi. Finalmente, a nosso ver, *conteúdo formal* é um conceito que nada agrega à filosofia da matemática e que, no contexto da física é uma tautologia.

Apêndice: Sobre a história da matemática e o uso de recursos computacionais como auxílio para resolução de problemas

O conceito denominado de *resolução de problemas* é discutido em áreas diversas. Em Educação Matemática há grande destaque com relação às perspectivas propostas por Polya (1957). De acordo com Polya, o processo de resolução de problemas perpassa necessariamente por quatro etapas do ponto de vista didático-pedagógico, sendo elas: (i) compreensão do problema (exploratória); (ii) elaboração de um plano; (iii) execução do plano e; (iv) revisão da solução.

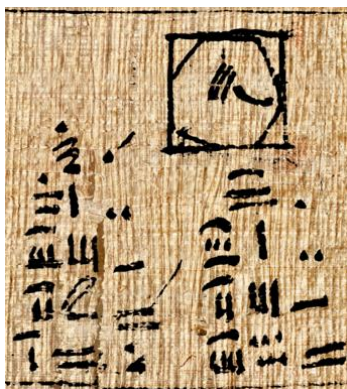
Cabe destacar que, em nossa perspectiva, a gênese do conceito de resolução de problemas nos remete não somente a Polya, mas a problemas da história da matemática e, em particular, à análise acerca dos tipos de notações (ou simbologias) e procedimentos de demonstração desenvolvidos em diferentes épocas e culturas. Balieiro Filho (2017) destaca, por exemplo, como Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya são episódios ilustres não somente do ponto de vista da resolução de problemas, mas principalmente da história da heurística na Matemática.

A seguir, discutiremos três episódios de problemas da história da matemática buscando ilustrar aspectos importantes referentes a simbologias matemáticas e procedimentos de demonstração. Evidenciamos que as notações atuais nos permitem elaborar compreensões sobre tais demonstrações e que o uso de recursos computacionais fomenta desafios epistemológicos à demonstração

matemática em cenários pedagógicos e de natureza teórica, como no caso do teorema de quatro cores (Fritsch & Fritsch, 1998).

Episódio 1: Quadratura do Círculo no Egito Antigo

O papiro denominado de *Rhind Mathematical Papyrus* (RMP), datado de cerca de 1650 a.C., é composto por 87 problemas (com soluções), sendo uma rica fonte primária da matemática egípcia na antiguidade. Este papiro envolve elementos como multiplicação, divisão, frações, cálculos de áreas e volumes, além de aplicações da matemática a problemas práticos. Em particular, o Problema 48 do RMP ou RMP 48 (ver Figura a seguir)¹ é o único problema do papiro que não possui enunciado; consiste “apenas” em uma ilustração e no desenvolvimento de alguns cálculos.



De acordo com Cooper (p. 458, 2011), o Problema 48 do RMP assume certo caráter excepcional dentre os papiros matemáticos egípcios, “pois não contém as instruções escritas usuais que explicam ao estudante-escriba o que ele deve fazer”. Há “apenas” um diagrama e duas colunas com cálculos. Chace (1979) apud Cooper (2011) apresenta uma tradução

¹ Fonte: <http://stevenpigeon.com/Publications/publications/Pigeon--Quadrature-in-Ancient-Egypt--Revisited--2016.pdf>

do hierático para o inglês desses cálculos e inclui um enunciado sobre o que ele considera estar faltando nesse problema. O enunciado é: “compare a área de um círculo com a de seu quadrado circunscrito”. A Figura a seguir (Chace, 1979 apud Cooper, 2011) apresenta essa tradução dos cálculos na qual as inclusões de Chace (1979) aparecem em negrito.

Compare the area of a circle and its circumscribing square.			
The circle of diameter 9.		The square of side 9.	
1	8 <i>setat</i>	\ 1	9 <i>setat</i>
2	16 "	2	18 "
4	32 "	4	36 "
\ 8	64 "	\ 8	72 "
		Total	81 "

Cooper (2011) argumenta que esses cálculos detalham o método egípcio antigo para multiplicar 8 por 8 e 9 por 9, ou seja, trata-se de um método para calcular 8^2 e 9^2 . Destacamos que não há referência direta ao procedimento para o cálculo da área do círculo, embora, tenha sido proposto na ilustração contida no RMP 48 uma referência aos meios pelos quais tal procedimento de cálculo foi inicialmente alcançado. Alguns pesquisadores têm argumentado que as linhas desenhadas dentro do quadrado refletem a intenção do escriba em representar um polígono de oito lados. Outros pesquisadores consideram que o escriba buscou apenas desenhar um círculo. Independentemente de qual dessas figuras o escriba estava na verdade tentando desenhar, há um amplo entendimento entre os historiadores da matemática de que a mensagem básica do RMP 48 era a de mostrar que, quando um círculo estiver inscrito em um quadrado e sua área for 64 unidades quadradas, a área do quadrado será de 81 unidades quadradas. Cooper (2011) ainda sugere que não era apenas esta a principal lição que se pretendia trazer com o Problema 48 no RMP, mas que, além disso, este problema pode não ser considerado como relacionado

apenas com o procedimento do cálculo da área do círculo, que chamaremos de *algoritmo da área do círculo*.

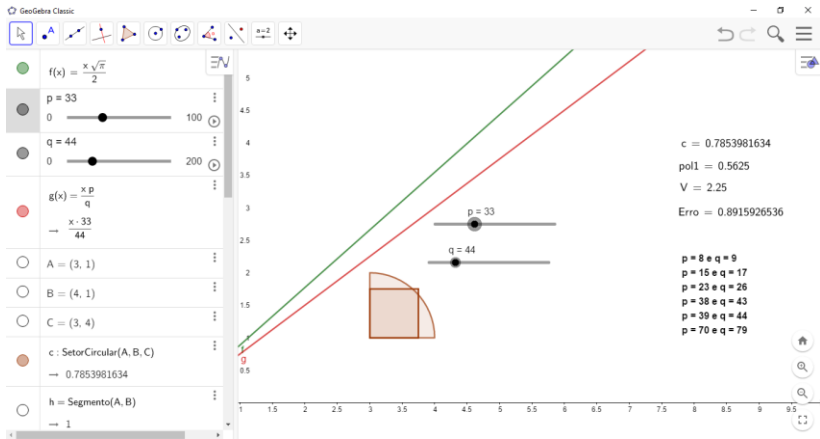
Em relação ao RMP 48, Gillings (1982) destaca que, em nenhum momento, o escriba sugere o desenvolvimento do procedimento “tire um nono do diâmetro”, como feito em outros quatro Problemas do RMP (41, 42, 43, e 50). Com isso, Gillings (1982) sugere que o escriba omitiu esse fato justamente para explicitar o descobrimento da regra clássica, ou seja, o algoritmo da área do círculo. Contudo, Clagett (1999) argumenta que a declaração de Gillings é apenas uma conjectura, pois o RMP 48 não mostra explicitamente a descoberta da regra clássica. Para Cooper (2011), tudo o que pode ser dito com alguma certeza sobre o RMP 48 é que é uma demonstração de que a área de um círculo, quando circunscrito um quadrado, está na mesma relação que o número 64 está com o número 81. Nesse sentido, de acordo com Cooper (2011), podemos inferir que o RMP 48 é um problema que visa calcular a área de um círculo.

Para calcular a área de um círculo, pode-se criar um quadrado cujos lados são iguais a $\frac{8}{9}$ do comprimento do diâmetro do círculo (e, portanto, cujos lados são iguais a $\frac{8}{9}$ do comprimento de cada lado do quadrado circunscrito do círculo). A área do círculo será então equivalente à área do quadrado de “ $\frac{8}{9}$ do diâmetro”. Este é o processo visto nos problemas 41, 42 e 50 do RMP. O segundo entendimento em evidência no Problema 48, e como já afirmado, é que a área de um círculo estará em relação à área do quadrado circunscrito desse círculo, assim como o número 64 está para o número 81. (...) A mudança sutil de foco do segundo ponto permite que se prossiga por um caminho muito diferente no que diz respeito aos *circular calculations*, um caminho que pode ter sido uma razão proeminente não apenas por trás da decisão de incluir o Problema 48 no texto do RMP em primeiro lugar, mas também pela maneira específica como foi apresentado (Cooper, p. 460, 2011).

Nesse cenário, em um processo genuinamente heurístico baseado em procedimentos envolvendo estimativas e medidas, pode-se inferir que, para os egípcios na antiguidade, $(8/9)^2$ é uma “boa” aproximação para o valor da medida da área da região delimitada pelo quadrante de círculo de raio 1. Ou seja, em um processo de resolução na interface da geometria com a aritmética, podemos expressar, em notação moderna, $(8/9)^2 \approx \frac{\pi}{4}$. Em Scucuglia et. al. (2021)², foi discutido como professores de matemática em formação continuada exploram esse problema com base no uso do software GeoGebra. Na realidade, propôs-se aos professores de matemática que, utilizando recursos computacionais, fosse determinada a razão $\frac{p}{q}$ com p e q primos entre si, de modo que $\frac{p}{q}$ seja uma “boa” aproximação para $(\frac{p}{q})^2 \approx \frac{\pi}{4}$.

Já em Scucuglia et. al. (2021) é discutida uma situação em que um grupo de professores se propuseram a investigar $p = q \frac{\sqrt[3]{\pi}}{2}$ com o auxílio de software. No entanto, eles exploraram a inclinação de $\frac{\sqrt[3]{\pi}}{2}$. De fato, contrastando a irracionalidade de $\frac{\sqrt[3]{\pi}}{2}$ com a racionalidade de p/q , o grupo com o software construiu outra reta com uma “inclinação racional”, e então, este par (p/q) seria exatamente a fração que eles estavam procurando. Assim, p/q seria aproximado a $\frac{\sqrt[3]{\pi}}{2}$ em relação à aproximação das inclinações. Quando mudaram os valores de p ou q na construção, obtiveram outra reta. No GeoGebra, a linha vermelha era a “inclinação racional” e a linha verde era a “inclinação irracional”. Portanto, animando os valores para p e q , eles identificaram candidatos para (p, q) quando as linhas se sobreporiam intimamente.

² <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-021-01246-1>



Nesse caso, consideraram diversos valores para p e q, tais como: $p = 15$ e $q = 17$; $p = 23$ e $q = 26$; $p = 39$ e $q = 44$; $p = 70$ e $q = 79$. Para comparar os valores e analisar qual par melhor corresponderia a uma solução potencial, o grupo criou a função “Erro = $|\pi - V|$ ” que mostra a diferença entre o valor de π e quatro vezes a área do quadrado, uma vez que o problema é explorado no primeiro quadrante do círculo. Assim, conjecturaram que $(39/44)^2 \approx \pi / 4$.

A interface história da matemática / uso de tecnologias digitais tem se mostrado interessante do ponto de vista pedagógico-matemático-heurístico.

Episódio 2: Proposição 2 do Livro XII de Os Elementos de Euclides

Os *Elementos de Euclides* são um tratado matemático composto por treze livros publicados na Alexandria por volta de 300 a.C. A estrutura dos *Elementos* é composta por definições, postulados e axiomas. A partir daí e de procedimentos de demonstrações envolvendo conceitos de lógica, como a demonstração por absurdo, são obtidos os teoremas – para uma introdução histórica ao trabalho de Euclides, ver (Melogno, pp. 61-80 2011).

Os *Elementos de Euclides* influenciaram diretamente a maneira como atualmente concebemos um sistema matemático formal. De acordo com Bicudo (2004, p. 65), a estruturação da matemática contemporânea é fundamentalmente um legado dos gregos e “exibe todo o seu esplendor nos *Elementos* (300 a.C.) de Euclides. A noção de demonstração nesses autores (a saber, Euclides, Arquimedes, Apolônio) não se difere da nossa”.

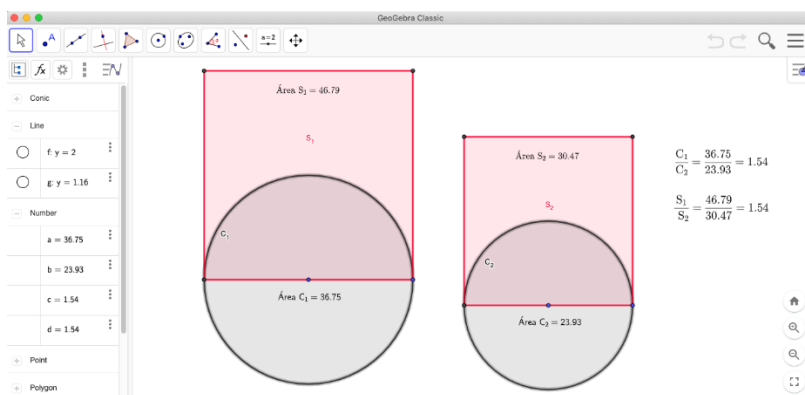
Do ponto histórico-matemático, existe certa problemática com relação às fontes nos estudos sobre os *Elementos* de Euclides. Há um fragmento dos *Elementos* datado de 100 d.C. encontrado no final do século XIX. Existem também algumas edições datadas dos séculos XV-XVI, incluindo um *editio princeps*. Do século XVI ao XVII, encontramos diversas traduções para o latim, italiano, alemão, francês, espanhol, árabe, chinês e inglês. Há grande destaque na história da matemática com relação a tradução realizada por Irineu Bicudo: trata-se de tradução completa para o Português diretamente do Grego Clássico publicada em 2009.

Neste segundo episódio, discutiremos alguns aspectos da Proposição 2 do Livro XII de Euclides. A proposição é assim enunciada: “Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros” (Bicudo, p. 528, 2009).

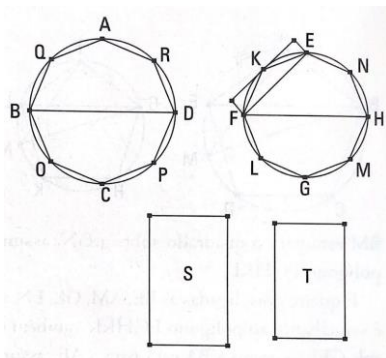
Utilizando a notação atual, podemos sugerir que esse enunciado é de fácil verificação. Sejam C_1 e C_2 os valores das medidas das áreas de dois círculos de raio r_1 e r_2 , respectivamente. Sejam S_1 e S_2 os valores das áreas dos quadrados de lado r_1 e r_2 , ou seja, $S_1 = r_1^2$ e $S_2 = r_2^2$. O enunciado sugere que $C_1/C_2 = S_1/S_2$. Provemos por absurdo. Suponhamos que $C_1/C_2 \neq S_1/S_2$. Logo, $(\pi r_1^2)/(\pi r_2^2) \neq r_1^2/r_2^2 \Rightarrow r_1^2/r_2^2 \neq r_1^2/r_2^2$ (absurdo!). Portanto, $C_1/C_2 = S_1/S_2$.

Também é possível explorar a Proposição 2 - Livro XII utilizando o software GeoGebra. Na situação ilustrada na figura a seguir, construímos dinamicamente dois círculos e dois quadros tendo como lado os diâmetros

dos círculos. A construção com o software é dinâmica, pois, permite simular as construções variando as medidas dos raios utilizando controles deslizantes. Calculamos a área dos círculos e dos quadrados utilizando um comando disponibilizado pelo próprio software. Inserimos comandos para calcular as razões entre as áreas dos círculos ($\frac{C_1}{C_2} = \frac{a}{b} = c$) e entre as áreas dos quadrados ($\frac{S_1}{S_2} = d$). Com o software, verificamos que, para qualquer valor dos raios dos círculos simulados, $o = c = d$. O GeoGebra oferece, portanto, meios para verificação de proposições, nas quais destacamos elementos heurísticos nos processos de experimentação/simulação com tecnologia digital.



Com relação à demonstração da Proposição 2 desenvolvida no Livro XII dos Elementos, chamamos atenção para três aspectos: (1) uso do procedimento de demonstração por absurdo; (2) linguagem matemática de natureza geométrica; (3) procedimento de construção de polígonos para o cálculo de áreas. A seguir, apresentamos a demonstração da proposição 2 – Livro XII traduzida por Bicudo (p. 528-530, 2009).



Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros.

Sejam os círculos ABCD, EFGH e [sejam] os diâmetros dele BD, FH; digo que, como o círculo ABCD está para o círculo EFGH, assim o quadrado sobre a BD para o quadrado sobre a FH. Pois, se não como o círculo ABCD está para o círculo EFGH, assim o quadrado sobre BD para o sobre a FH, como o sobre a BD para o sobre a FH, assim o círculo ABCD estará ou para alguma área menor do que o círculo EFGH ou para uma maior. Esteja, primeiramente, para uma menor, a S. E fique inscrito no círculo EFGH o quadrado EFGH; então, o quadrado inscrito [no GeoGebra: quadrilátero q₁] é maior do que a metade do círculo EFGH [no GeoGebra: número b], visto que, caso pelos pontos E, F, G, H tracemos [retas] que tocam o círculo, o quadrado EFGH é metade do quadrado sendo circunscrito ao círculo [no GeoGebra: número c], e o círculo [no GeoGebra: número a] é menor do que o quadrado circunscrito [no GeoGebra: quadrilátero q₂]; desse modo, o quadrado inscrito EFGH [no GeoGebra: quadrilátero q₁] é maior do que a metade do círculo EFGH [no GeoGebra: número b].

Fiquem cortadas em duas as circunferências EF, FG, GH, HE nos pontos K, L, M, N, e fiquem ligadas as EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE; portanto, cada um dos triângulos EKF, FLG, GMH, HNE é maior do que a metade do segmento do círculo correspondente a ele mesmo, visto que, caso pelos pontos K, L, M, N tracemos as que tocam o círculo e completemos os paralelogramos sobre as retas EF, FG, GH, HE, cada um dos triângulos EKF, FLG, GMH, HNE [no GeoGebra: triângulo t₁, t₂, t₃ e t₄] será metade do paralelogramo [no GeoGebra: número o] correspondente a ele mesmo, mas o segmento correspondente a ele mesmo é menor do que o paralelogramo; desse modo,

cada um dos triângulos EKF, FLG, GMH, HNE é maior do que a metade do segmento do círculo correspondente a ele mesmo.

Então, cortando as circunferências restantes em duas, e ligando as retas e fazendo isso sempre, deixaremos alguns segmentos do círculo que serão menores do que o excesso pelo qual o círculo EFGH excede a área S. Pois, foi provado, no primeiro teorema do décimo livro, que, tendo expostas duas magnitudes desiguais, caso seja subtraída da maior uma maior do que a metade, e da deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, será deixada alguma magnitude que será menor do que a menor magnitude exposta. Fiquem deixadas, de fato, e sejam os segmentos do círculo EFGH sobre as EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE menores do que o excesso pelo qual o círculo EFGH excede a área S. Portanto, o polígono restante EKFLGMHN é maior do que a área S.

Fique inscrito também no círculo ABCD o polígono AQBOCPDR semelhante ao polígono EKFLGMHN; portanto, como o quadrado sobre BD está para o quadrado sobre FH [no GeoGebra: número u], assim o polígono AQBOCPDR para o polígono EKFLGMHN [no GeoGebra: número v].

Mas também como o quadrado sobre a BD para o sobre a FH, assim o círculo ABCD para a área S; portanto, também como o círculo ABCD para a área S, assim o polígono AQBOCPDR para o polígono EKFLGMHN; portanto, alternadamente, como o círculo ABCD para o polígono nele, assim a área S para o polígono EKFLGMHN. Mas o círculo ABCD é maior do que o polígono nele; portanto, também a área S é maior do que o polígono EKFLGMHN. Mas também é menor; o que é impossível. Portanto, não como o quadrado sobre BD está para o sobre a FH, assim o círculo ABCD para alguma área menor do que o círculo EFGH. Do mesmo modo, então provaremos que nem como o sobre a FH para o sobre a BD, assim o círculo EFGH para alguma área menor do que o círculo ABCD.

Digo, então, que nem como o sobre a BD para o sobre a ZH, assim o círculo ABCD para alguma área maior do que o círculo EFGH.

Pois, se possível, seja para uma maior, a S. Portanto, em proporção, como o quadrado sobre a FH está para o sobre a DB, assim a área S para o círculo ABCD. Mas, como a área S para o círculo ABCD, assim o círculo EFGH para alguma área menor do que o círculo ABCD. Mas, como a área S para o círculo ABCD, assim o círculo EFGH para alguma área menor do que o círculo ABCD;

portanto, também como o sobre a FH para o sobre a BD, assim o círculo EFGH para alguma área menor do que o círculo ABCD; o que foi provado impossível. Portanto, não como o quadrado sobre a BD está para o sobre a FH, assim o círculo ABCD para alguma área maior do que o círculo EFGH. Mas foi provado que nem para uma menor; portanto, como o quadrado sobre a BD está para o sobre a FH, assim o círculo ABCD para o círculo EFGH. Portanto, os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros; o que era preciso provar.

A seguir, com base na abordagem proposta por Baron (1985), vamos descrever, utilizando notação atual, aspectos importantes acerca dos procedimentos de demonstração desenvolvidos na Proposição 2 – Livro XII.

Prove que $C_1/C_2 = S_1/S_2$.

Demonstração: Ou $C_1/C_2 = S_1/S_2$ ou $C_1/C_2 \neq S_1/S_2$.

Se $C_1/C_2 \neq S_1/S_2$, então $S_1/S_2 = C_1/S$, onde $S \neq C_2$, isto é, $S < C_2$ ou $S > C_2$.

Se $S < C_2$, inscrevemos um quadrado em C_2 e através de repetidas bissetões construímos uma sequência de polígonos (P_n) de tal modo que $p_{r+1} - p_r > \frac{1}{2}(C_2 - p_r)$.

Em Euclides – Livro X, Proposição 1³, escolheu-se n suficientemente grande e obteve-se $C_2 - p_n < C_2 - S$. Então, $S < p_n$.

De Euclides - Livro XII, Proposição 1, sabemos que $q_n/p_n = S_1/S_2$, logo $q_n/p_n = C_1/S$ e $C_1/q_n = S/p_n$.

Como $C_1 > q_n$, então $S > p_n$.

Como $(S < C_2) \Rightarrow (S < p_n) \wedge (S > p_n)$, concluímos que $S \nless C_2$.

Se $S > C_2$ com $S_1/S_2 = C_1/S$. Segue que $S_2/S_1 = S/C_1$.

Seja $S/C_1 = C_2/T$, então $S/C_2 = C_1/T$; como $S_2/S_1 = S/C_1$ e $S > C_2$, então $S_2/S_1 > C_2/C_1$. Mas $S_2/S_1 = S/C_1 = C_2/T$, logo $C_2/T > C_2/C_1$ e $T < C_1$.

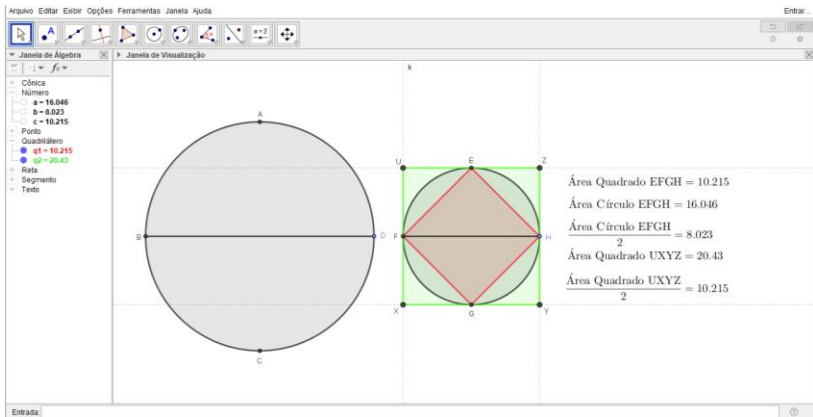
A segunda parte da demonstração reduz-se à primeira parte, salvo que C_1 e C_2 , S_1 e S_2 e S e T estão trocados e são inscritos polígonos em C_1 ao invés de C_2 . Chega-se novamente a uma contradição.

³ Em Euclides – Livro X, Proposição 1: “Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta.”

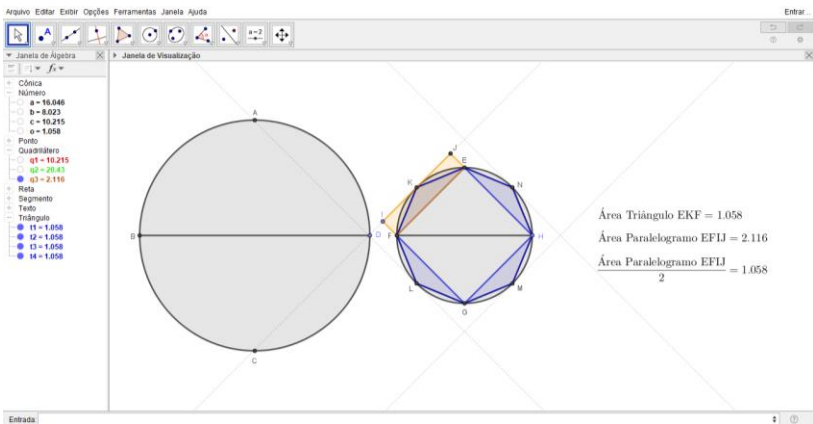
Portanto, devemos rejeitar $S < C_2$ e $S > C_2$ e concluir que $S = C_2$ ou $S_1/S_2 = C_1/C_2$.

Apresentamos, finalmente, a possibilidade de se explorar a demonstração da Proposição 2 utilizando o GeoGebra. Essa abordagem foi estruturada em 4 partes⁴.

Parte 1

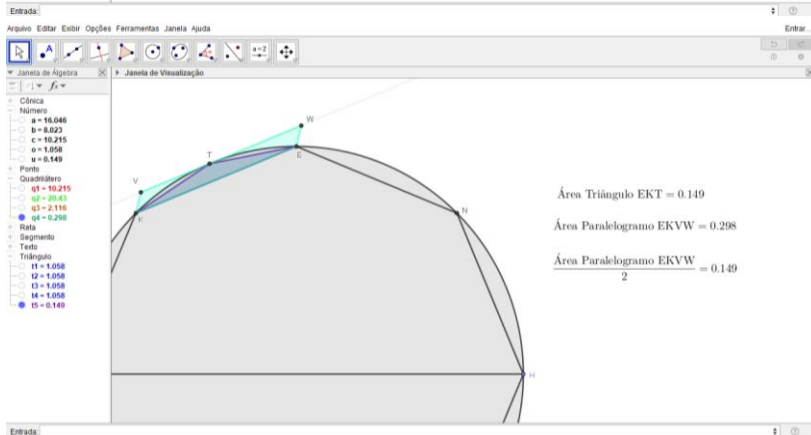
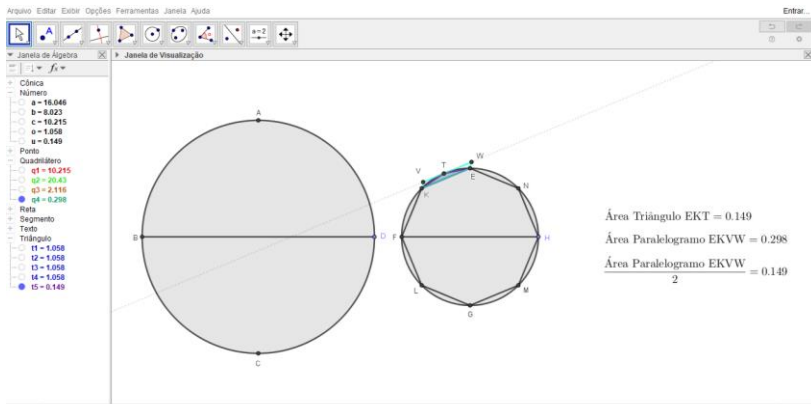


Parte 2

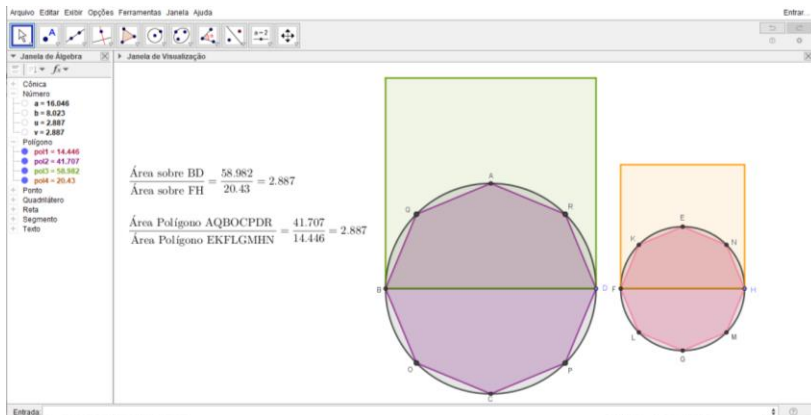


⁴Agradecemos a Lara Martins Barbosa pelo desenvolvimento desse trabalho com o GeoGebra.

Parte 3



Parte 4



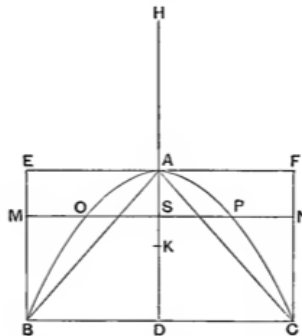
Episódio 3: O Método de Arquimedes, Proposição 4

Em *O Método*, Proposição 4, Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) enuncia: “Qualquer segmento de um conóide reto (isto é, um parabolóide de revolução) seccionado por um plano perpendicular ao eixo é igual a $1\frac{1}{2}$ vezes o cone que tem a mesma base e o mesmo eixo do segmento” (Heath, p. 24, 1912).

Vejamos a demonstração:

Isso pode ser investigado por nosso método, como segue.

Cortemos um parabolóide de revolução por um plano através do eixo obtendo a parábola BAC; e corte também com outro plano perpendicular ao eixo que intercepte o primeiro plano BC. Seja DA o eixo do segmento, prolongue-o até H de tal modo que $HA = AD$.



Imagine que HD seja a haste de uma balança e A seu ponto médio. A base do segmento sendo o círculo onde BC é o diâmetro, e em um plano perpendicular a AD, imagine (1) um cone obtido com o círculo em questão como base e A como vértice, e (2) um cilindro com o mesmo círculo como base e AD como eixo.

No paralelogramo EC tome qualquer reta MN paralela a BC, e por MN trace um plano perpendicular a AD; este plano cortará o cilindro em um círculo com diâmetro MN e o parabolóide em um círculo com diâmetro OP.

Agora, BAC sendo uma parábola e BD, OS as coordenadas,

$$DA : AS = BD^2 : OS^2,$$

ou

$$HS : AS = MS^2 : SO^2$$

Portanto,

$$HA : AS = (\text{círculo, raio MS}) : (\text{círculo, raio OS})$$

$$= (\text{círculo no cilindro}) : (\text{círculo no parabolóide})$$

Portanto, o círculo no cilindro, no lugar onde ele se localiza, estará em equilíbrio, em torno de A, com seu círculo no parabolóide, se este último for colocado com seu centro de gravidade em H.

Similarmente para as duas seções circulares correspondentes feitas por um plano perpendicular a AD e passando por qualquer outra reta no paralelogramo que é paralelo a BC.

Assim, como de costume, se considerarmos todos os círculos componentes do cilindro e segmento inteiro e os tratarmos do mesmo modo, acharemos que o cilindro, no lugar onde esta estará em equilíbrio em torno de A com o segmento colocado com seu centro de gravidade em H.

Se K é o ponto médio o ponto médio de AD, K é o centro de gravidade do cilindro; logo, $HA : AK = (\text{cilindro}) : (\text{segmento})$.

Portanto, cilindro = 2(segmento).

E cilindro - 3(cone ABC); [Euclides, XII 10]⁵

Portanto, segmento = 3/2 (cone ABC).

(Heath, p. 24-25, 1912).

Muitos aspectos da demonstração desenvolvida por Arquimedes nessa Proposição 4 nos chamam atenção: abordagem bidimensional, uso de termos envolvendo a noção de equilíbrio, etc. Em linguagem ou notação atual, podemos dizer que esse problema diz respeito à relação entre os valores das medidas dos volumes de um cilindro, um parabolóide e um cone de mesma base e altura. Neste caso, se a medida do volume⁶ do cilindro for 1, o volume do parabolóide será 1/2 e o do cilindro 1/3. Ou seja, problema ordinariamente explorável em cenários da Educação Básica.

⁵ Euclides, XII 10: "Todo cone é uma terça parte do cilindro que tem a mesma base que ele e altura igual".

⁶ Para uma unidade arbitrária de volume.

Utilizando conceitos introdutórios de cálculo diferencial e integral acerca do cálculo de volumes de sólidos⁷ de revolução, considerando raios dos círculos das bases e alturas igual a 1, teremos o seguinte na notação moderna:

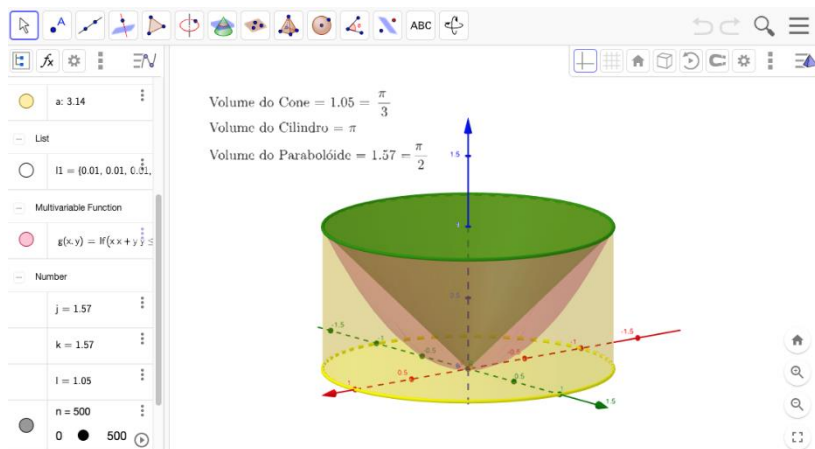
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

$$V_{cilindro} = \pi \int_0^1 [1]^2 dx = \pi,$$

$$V_{parabolóide} = \pi \int_0^1 [\sqrt{x}]^2 dx = \pi/2,$$

$$V_{cone} = \pi \int_0^1 [x]^2 dx = \frac{\pi}{3}$$

Consideramos interessante a verificação com GeoGebra dessa relação $1 \sim 1/2 \sim 1/3$ envolvendo, respectivamente, os volumes de um cilindro, um parabolóide e um cone de mesma base e altura. Os volumes do cilindro e cone podem ser calculados utilizando-se de um comando disponibilizado pelo próprio software. O cálculo do volume do parabolóide requer algumas construções em termos de sistema de computação⁸ algébrica.



⁷Ver (Munen & Foulis, Cap.7, 1982).

⁸A construção a seguir foi desenvolvida pela colega Lara Martins Barbosa.

Conclusões

Neste apêndice exploramos alguns episódios da história da matemática, apresentando três problemas e possíveis resoluções. Em cada episódio, buscamos inicialmente indicar notações e procedimentos de demonstração originalmente desenvolvidos, mas reconhecendo que se tratam de traduções. Também, discutimos possibilidades de se reinterpretar os enunciados e desenvolver resoluções alternativas utilizando procedimentos e notações mais atuais, indicado, inclusive, caminhos para exploração utilizando recursos computacionais. De maneira geral, o uso de um software de matemática dinâmica como GeoGebra oferece meios para que sejam explorados heurísticamente procedimentos alternativos de demonstração matemática. Essa dimensão computacional-heurística perpassa por discussões pertinentes à Filosofia da Matemática acerca do papel dos computadores na demonstração matemática. Temos muito interesse sobre essa discussão, mas a abordaremos de maneira apropriada em oportunidade futura. Por fim, consideramos que a interface história da matemática / uso de tecnologias digitais fomenta certo potencial pedagógico que pode ser de interesse à Educação Matemática.

Nota de agradecimento: os autores agradecem a Lara Martins Barbosa.

Referências

- AGUÍLAR, A. C. “Diagramas de Feynman: o poder de uma imagem”, Revista Brasileira do Ensino de Física, vol. 40, nº4, e4205 (2018).
- ALI, S. T. & ENGLIS, M. “Quantization methods – a guide for physicists and analysts”, Reviews in Mathematical Physics, Vol. 17, nº 4 pp. 391-490 (2005).
- APOSTOL, T. M. *Calculus – one variable calculus with and introduction to linear álgebra*, Vol. 1. Blaidsdell Publishing Company, USA (1961).
- ARFKEN, G. B. & WEBER, H. J. , *Mathematical methods for physicists*, Elsevier Academic Press, USA (2005).
- BAILY, C. “Early atomic models – from mechanical to quantum (1904-1913)”, The European Physical Journal H, pp. 1-38, (2012).
- BALIEIRO FILHO, I. F. *Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya: quatro episódios da história da heurística*. 1. ed. São Paulo: Editora UNESP Digital, . v.1. p. 201 (2017).
- BARON, M. E. *Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do Cálculo – Unidade 2: os indivisíveis*. Editora Universidade de Brasília, Brasília (1985).
- BARROW-GREEN, J. *Poincaré and the three-body problem*, American Mathematical Society, USA (1997).
- BASSALO, J. M. F. & CATTANI, M. S. D. *Osciladores harmônicos – clássicos e quânticos*. Editora livraria da física, SP (2009).
- BASSALO, J. M. F. *Eletrodinâmica quântica*, Editora da Livraria da Física, São Paulo, SP (2006).

BERKELEY, G. "The analyst" In EWALD, W. *From Kant to Hilbert – a source book in the foundations of mathematics – vol. I*, Clarendon Press, USA (1999).

BERNOULLI, J. *Opera Omnia, vol. I*, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, (1968).

BÉZIAU, J.Y. "A lógica pode ser simples" Em , DA COSTA, N. C. A. & BÉZIAU, J. Y. & BUENO, O. *Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos*, Coleção Cle, Vol. 23, Campinas (1998).

BICUDO, I. (tradutor e organizador). *Os elementos*. Editora da UNESP, SP (2009).

BICUDO, I. "As figuras nos *Elementos* de Euclides", Em *Revista Brasileira de Historia da Matematica, Festschrift Ubiratan D'Ambrosio*, SP (2007).

- Peri Apodeixeos/De demonstracione. In: BICUDO, M. A. V. & BORBA, M. C. *Educação Matemática: pesquisa em movimento*, Cortez. São Paulo, (2004).

BISHOP, R. L. & GOLDBERG, S. L. *Tensor analysis on manifolds*, Dover Publications, Inc. New York (1980).

BORN, M. "Symbol and the reality", *Dialectica*, Vol. 20 n^o2 (1966).

BUENO, O. & FRENCH, S. "Infestation or pest control: the introduction of group theory into quantum mechanics" In *Manuscrito – Revista internacional de filosofia do centro de lógica, epistemologia e história da ciência (CLE): Essays in honour of Osvaldo Chateaubriand Filho* Campinas, (1999).

BUTKOV, E. *Física Matemática*, Guanabara Koogan, RJ (1988).

BYRON JR., F. W. & FULLER, R. W. *Mathematics of classical and quantum physics*, Dover Publications, Inc. New York (1992).

CAJORI, F. *A history of mathematical notations*, Dover Inc. Publications, New York (1993).

- "The history of the notations of the calculus", *Annals of mathematics*, Vol. 25, No. 1, pp. 1-46 (1923).

CARNAP, R. *Introduction to symbolic logic and its applications*, Dover Publications, Inc. New York (1958).

- "The Elimination of Metaphysics Through Logical Analysis of Language". In: AYER, A. J. *Logical Positivism*, The Free Press, pp. 60-81. New York (1966).

- "The history of notations for the calculus", *Annals of mathematics*, 2nd Series, Vol. 25, N°1, pp. 1-46, (1923).

CARTAN, E. *The theory of spinors*, Dover Publications, Inc. New York (1966).

CASANAVE, A. L. "Conhecimento simbólico na investigação de 1764", Vol. 11, N°1, *Analytica* – Revista de filosofia, (2007).

CAVAILLÉS, J. "Sobre a lógica e a teoria da ciência" Em *Obras completas de filosofia das ciências*, Editora Forense, RJ (2012).

CHACE, A. B. *The Rhind mathematical papyrus: free translation and commentary with selected photographs, transcriptions, transliterations, and literal translations*. Va.: National Council of Teachers of Mathematics, Reston (1979).

CHATEAUBRIAND, O. "Lógica e conhecimento", Vol. 11, N°1, *Analytica* – Revista de filosofia, (2007).

- *Logical forms part I – truth and descriptions*, Coleção CLE, Vol. 34, Campinas (2001).

Logical forms part II – logic, language and knowledge, Coleção CLE, Vol. 42, Campinas, (2005).

CHIHARA, C. *A structural account of mathematics*, Oxford Univ. Press, USA (2004).

CLAGETT, M. *Ancient Egyptian Science. A Source Book*, vol. 3. Philadelphia: American Philosophical Society, Philadelphia (1999).

COOPER, L. “Did Egyptian scribes have an algorithmic means for determining the circumference of a circle?” *Historia Mathematica*. V. 38, p. 44, pp. 455-484 (2011).

DA COSTA, N. C. A. & DORIA, F.A. *Fragments – Física quântica*, Editora Reavan, RJ (2016).

DA COSTA, N. C. A & KRAUSE, D. Fundamenteo– Revista de Pesquisa em Filosofia (2015)
<https://periodicos.ufop.br:8082/pp/index.php/fundamento/article/view/2422>

DA COSTA, N. C. A. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, Editora Hucitec, SP (2008).

DANIEL, M. *Particles, Feynman diagrams and all that*, Phys. Edu. **41** (119), (2006).

DA SILVA, J. J. *Mathematics and its applications – a transcendental-idealist perspective*, Springer, Switzerland (2017).

- *Filosofias da matemática*, Edunesp, SP (2007).

- “Away from the facts – Symbolic knowledge in Husserl’s philosophy of mathematics” In CASANAVE, A. L. *Symbolic knowledge from Leibniz to Husserl – Studies in logic*, College Publications, vol. 41 UK (2012).

DAVIS, M. *The universal computer – the road from Leibniz to Turing*, W.W. Norton & Company, New York (2000).

DE GOSSON, M. A. “Born–Jordan Quantization and the Equivalence of the Schrödinger and Heisenberg Pictures”, *Found. Phys.* 44:pp. 1096–1106 (2014).

DE OLIVEIRA, C. R. *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*, Birkhäuser Verlag AG, Germany (2009).

DIACU, F. “The solution of the n-body problem”, *The Mathematical intelligencer* Vol. 18, N°3, Springer-Verlag, New York (1996).

DIRAC, P. A. M. *The quantum theory of the electron*, Proceedings of the Royal Society of Londo, Series A, Vol. 117, N^o778, pp. 610-624 (1928).

- “Foundations of quantum mechanics”, *Nature*, n^o 4941, **203**, pp. 115-116 (1964).

DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*, Editora do IMPA, RJ (1988).

DODD, J. & GRIPAIS, B. *The ideas of particle physics*, 4th Edition, Cambridge Univ. Press, UK (2020).

DUGAS, R. *A history of mechanics*, Dover Publications, Inc. New York (1988).

DUNNE, P. “Looking for consistency in the construction and use of Feynman diagrams” *Phys. Edu.* **36** 366-374 (2001).

DYSON, F. *Advanced quantum mechanics*, World Scientific Publishin, Singapore (2007).

- “The theories of radiation of Tomonoga, Schwinger and Feynman”, *Phys. Rev.* 75, p. 486 (1949*).

- “The S - Matrix in quantum electrodynamics”, *Phys. Rev.* 75, p. 1736 (1949).

- “Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics” , *Physical Review*, 85 (4), pp. 631-632, (1952).

EINSTEIN, A. *O significado da relatividade*, Arménio Amado – Editora, Coimbra (1984).

ENDERTON, H. B. *A mathematical introduction to logic*, Academic Press, Inc. USA (1972).

EVES, H. *Introdução à história da matemática*, Editora da Unicamp, Campinas (2008).

FARIA, A.J. & FRANÇA, H.M. & MALTA, C.P. & SPONCHIADO, R.C. “Critical assessment of the Schrödinger picture of quantum mechanics”, *Physics Letters A* 305 pp. 322–328 (2002).

FEFERMAN, S. “Are There Absolutely Unsolvable Problems? Gödel’s Dichotomy Dichotomy, p.p. 1-19, *Philosophia Mathematica* (III) (2006).

FEYNMAN, R. P. & HIBBS, A. R. *Quantum mechanics and path integrals*, Dover Publications, Inc. New York (2005).

FEYNMAN, R.P. & LEIGHTON, R. B. & SANDS, M. *Feynman - lições de física*, Vol. 2, Bookman, Porto Alegre (2009).

FEYNMAN, R. P. *QED – the strange theory of light and matter*, Penguin Books, UK (1985).

- “The development of space-time view of quantum electrodynamics – Nobel lecture , December 11, 1965” IN BROWN, L. *Selected papers of Richard Feynman with comentaries*, World scientific publishing, pp. 9- 32, Singapore (2003).

- *The character of a physical law*, Penguin Books, England (1992).

- “The space-time approach to quantum electrodynamics”, *Phys. Rev.* 76, p. 769 (1949).

- “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics”, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 20, p. 267 (1948).

FIGUEIREDO, D. G. & NEVES, A. F. *Equações diferenciais aplicadas*, Ed. Impa, RJ (2015).

FOLLAND, G. B. *Introduction to partial differential equations – 2nd edition*, Princeton Univ. Press, UK (1995).

FREGE, G. “Whole numbers” In MCGUINNESS, B. *Collected papers on mathematics, logic and philosophy*, Basil Blackwell, UK (1984).

- *Conceitografia- Uma linguagem formular do pensamento puro decalcada sobre a da aritmética*, Editora do PPGFIL-UFRRJ, RJ (2018).

- “Sobre a justificação científica de uma conceitografia” – Coleção Os Pensadores, Ed. Abril Cultural, SP (1974).

- “On the ‘aim of conceptual notation’ ” In BYNUM, T. W. *Gottlob Frege – conceptual notation and related articles*, Oxford Univ. Press, UK (1972).

- FRITSCH, R. & FRITSCH, M. *The four-color theorem – history, topological foundations and idea of proof*, Springer-Verlag, USA (1998).

- GALILEU, G. “O ensaiador” Em *Bruno, Galileu, Campanela*, Coleção Os pensadores, Ed. Abril Cultural, SP (1983).

- GIANNOTTI, J. A. “Objetos formais segundo mestre Granger” Em MORENO, A. R. *Alguns aspectos do pensamento formal – homenagem a Gilles-Gaston Granger*, Coleção CLE, Volume 50 (2008).

- GILLINGS, R. J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Dover Publications, Inc. New York (1982).

- GITMAN, D. M. & TYUTIN, I. V. & VORONOV, B. L. *Self adjoint extensions in quantum mechanics*, Birkhäuser, USA (2012).

- GÖDEL, K. “¿Qué es el problema del continuo de Cantor?” Em MOSTERÍN, J. *Kurt Gödel – obras completas*, Alianza Editorial, Madrid (2006).

- GOMES, M. O. C. *Teoria quântica de campos*, Edusp, SP (2002).

- GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra – 4ª Edição*, Editora do Impa, RJ (1999).

- GRANDE, R. M. *A aplicabilidade da matemática à física*, tese de doutorado Campinas, SP (2011) <http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/280408>

- “Sobre o papel heurístico da matemática na descoberta de antipartículas em mecânica quântica relativística”. In: MELOGNO, P. (Org.). *Ciencia, matemática y experiencia: Estudios en historia del conocimiento científico*, pp. 137-154, Montevidéu, (2015) .

GRANGER, G. G. *A ciência e as ciências*, Edunesp, SP (1993).

- *Lógica e filosofia das ciências*, Ed. Melhoramentos, SP (1955).

- *Por um conhecimento filosófico*, Papyrus Editora, SP (1988).

- *Essai d'une philosophie du style*, 2. Ed. Paris, Odile-Jacob, Paris (1988*).

- *O Irracional*, Edunesp, SP (2002).

- "Estilo e objetividade nas ciências físicas" Em *Cadernos de história e filosofia da ciência*, Revista do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Série 3, v. 5, Campinas (1995).

- "Contentus formels et dualité", Manuscrito – Rev. Int. Fil., Campinas, v.30, n.2, pp. 259-282 (2007)

- "The notion of formal content", Social research, Vol. 49. No.2, Current Philosophy, pp. 352-382 (1982).

- "O formal e o transcendental na matemática", Estudos Avançados 4(10), (1990).

GREUB, W. H. *Linear algebra - 2nd Edition*, Springer-Verlag, Berlim (1963).

- *Multilinear algebra*, Springer-Verlag, Berlim (1967).

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to elementary particles*, John Wiley & Sons, Inc., USA (1987).

HALMOS, P. & GIVANT, S. *Logic as álgebra*, Mathematical association of America – Dolciani mathematical expositions N° 21, USA (1998).

HALMOS, P. "The basic concepts of algebraic logic", The American Mathematical Monthly, Vol. 63, No. 6, pp. 363-387 (1956).

- HANKINSON, R. J. "Filosofia da ciência" Em, BARNES, J. *Aristóteles*, Editora Ideias & Letras, pp. 155-190, Água Branca - SP (2009).
- HAWKING, S. W. & ELLIS, G. F. R. *The large scale structure of space-time*, Cambridge Univ. Press, UK (1973).
- HEATH, T. L. *The Method of Archimedes*. Cambridge University Press, London (1912).
- HEAVISIDE, O. *Electromagnetic theory - vol II*, Chelsea Publishing Company, New York (1971).
- HEISENBERG, W. *A parte e o todo*, Ed. Contraponto - UFRJ, RJ (2000).
- HELLMAN, G. "Three varieties of mathematical structuralism", *Philosophia Mathematica* (3) Vol. 9, pp. 184-211 (2001).
- HILDESHEIMER, W. *Mozart*, Editora Jorge Zahar, RJ (1991)
- HILTON, P. WU, YEL-CHIANG *Curso de álgebra moderna*, Editorial Reverté, S.A. España (1977).
- HUANG, K. *Statistical mechanics*, Wiley & Sons, Inc. New York (1963).
- ISHAM, C. *Lectures on quantum theory - Mathematical and structural foundations*, Imperial College Press, UK (2001).
- JONES, A. *A portable cosmos - revealing the Antikythera mechanism, scientific wonder of an ancient world*, Oxford Univ. Press, USA (2017).
- JOURDAIN, P. E. B. "The logical work of Leibniz", *The Monist*, Vol 26, Nº 4, pp. 504-523, (1916).
- KAISER, D. "Physics and Feynman diagrams", *American Scientist*, Volume 93, pp. 156-165, (2005).

- *Drawing theories apart – the dispersion of Feynman diagrams in postwar physics*, University of Chicago Press, USA (2005*).
- “Do Feynman diagrams endorse a particle ontology? The roles of Feynman diagrams in S-matrix theory” In CAO, T. Y, *Conceptual foundations of quantum field theory* Cambridge Univ Press UK (1999).
- KAKU, M. *Quantum field theory – a modern introduction*, Oxford Univ. Press, New York (1993).
- KANT, I. *Crítica da razão pura* – Coleção os Pensadores, Ed. Nova Cultural, SP (1999).
- KAPLAN, R. *The nothing that is – a natural history of zero*, Cambridge Univ. Press UK (1999).
- KAPLAN, W. *Cálculo avançado*, Edgar Blücher, SP (1975).
- KRANTZ, S.G. & PARKS, H. R. *The implicit function theorem – history, theory and applications*, Springer Science+ Business Media, LLC, UK (2003).
- KRAUSE, D. *Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência*, E.P.U. . LTDA. Brasil (2002).
- KREYSZIG, E. *Differential geometry*, Dover Publications, Inc. New York (2017).
- LEGG, C. “What is a logical diagram?” In MOKTEFFI, A. & SHIN, SUN-JOO, *Visual reasoning with diagrams – studies in Universal Logic*, Birkhäuser, New York N(2010).
- LEIBNIZ, G. W. “Meditations on knowledge, truth and ideas” In LOEMKER, L. *Gottfried Wilhelm Leibniz – Philosophical papers and letters* 2nd Edition, Netherlands (1989).
- “On the general Characteristics”, In LOEMKER, L. *Gottfried Wilhelm Leibniz – Philosophical papers and letters* 2nd Edition, Netherlands (1989).

- “Brief von Leibniz an de l’Hospital vom 30.9.1695” In GERHARDT, C.I. *G.W. Leibniz Mathematische Schriften, Band II*, Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Deutschland, p. 297, Deutschland (1962).

- LEGG, C. “What is a Logical Diagram?” In MOKTEFI, A. & SHIN, SUN-JOO, *Visual reasoning with diagrams – studies in universal logic*, Birkhäuser, pp. 1-18, Switzerland (2013).

- LIMA, E.L. *Curso de análise – vol. II*, Ed. IMPA, RJ (2000).

- *Álgebra linear*, Editora do IMPA, RJ (2009).

- *Cálculo tensorial*, Editora do IMPA, RJ (2012).

- LIPSCHUTZ, S. *Álgebra linear- Coleção Schaum*, Ed. McGraw-Hill do Brasil, LTDA, RJ (1971).

- LINDSAY, R. B. & MARGENAU, H. *Foundations of physics*, Dover Publications, Inc., New York (1956).

- LLOYD, S. “The universe as a quantum computer” In ZENIL, H. *A Computable Universe – Understanding and exploring nature as computation*, World Scientific, USA (2012).

- LOPES, J. L. *A estrutura quântica da matéria – do átomo pré-socrático às partículas elementares*, Editora UFRJ, RJ (2005).

- MARTIN-LÖFF P. “Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof”, *Synthese* **73**, 407–420 (1987).

- MATTUCK, D. *A guide to Feynman diagram in the many body problem*, 2nd edition, Dover Publications Inc., New York (1992).

- MCMAHON, D. *Quantum field theory DeMystified*, McGraw-Hill Companies, USA (2008).

MEHRA, J. *The beat of a different drum – the life and the Science of Richard Feynman*, Clarendon Press, Oxford University Press, Printed in the USA (1994).

MELOGNO, P. “Los elementos de Euclides e el desarrollo de la matemática griega” em *Elementos de Historia de la Ciencia*, Ed. MELOGNO, P. & RODRÍGUEZ, P. & FERNÁNDEZ, S. Ed. Universidad de la República, Uruguay (2011).

MOORMAN, R. H. *The Influence of Mathematics on the Philosophy of Leibniz*, National Mathematics Magazine, Vol. 19, No. 3. pp. 131-140 (1944).

- *The Influence of Mathematics on the Philosophy of Descartes*, National Mathematics Magazine, Vol. 17, No. 7. pp. 296-307 (1943).

MUNEN, M. A. & FOULIS, D. J. *Cálculo – vol. 1*, Editora LTC, RJ (1982).

NABER, G. L. *Topological methods in euclidean spaces*, Cambridge Univ. Press, USA (1988).

NEWTON, I. “Principia” In. Hawking, S. *On the shoulders of giants*, Running Press, USA (2002).

OLDHAM, K. B. & SPANIER, J. *The fractional calculus – theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, Academic Press, Inc. USA (1974).

PAIS, A. *Sutil é o Senhor – a ciência e a vida de Albert Einstein*, Nova Fronteira, RJ (1995).

PAULING, L. & WILSON, E. B. *Introduction to quantum mechanics*, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1935).

PEACOCK, J. A. *Cosmological physics*, Cambridge Univ. Press, UK (2005).

PEIERLS, R. E. “Wolfgang Ernst Pauli: 1900-1958”, *Biogr. Mem. Fell. R. Soc.* 5, pp. 174-192 (1960).

PENROSE, R. *The road to reality*, Vintage Books, USA (2004).

- *Il grande, il piccolo e la mente umana*, Raffaello Cortina editore, Milano (2000).

PESKIN, M. E. & SCHROEDER, D. V. *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley Publishing Company, USA (1995).

PESSOA JR., O. *Conceitos de física quântica –vol. 1*, Editora livraria da física, SP (2003).

- *Conceitos de física quântica –vol. 2*, Editora livraria da física, SP (2006).

- “Mapa das interpretações da teoria quântica” Em MARTINS, R. A. & BOIDO, G. & RODRIGUEZ, V. *Física: Estudos Filosóficos e Históricos*, AFHIC, pp. 119-52, Campinas (2006*).

PLATÃO. *A república*, Edipro, SP (2006).

POINCARÉ, J. H. “Mathematical creation” In HUTCHINS, R. M. & ADLER, J. M., *Gateway to the great books -9 Mathematics*, Encyclopedia Britannica, Inc. USA (1963).

- *Science and hypothesis*, The Walter Scott Publishing Co., LT, New York (1905).

POLYA, G. *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method. 2nd Edition*, Princeton University Press, Princeton (1957).

PRIEST, G. *Towards non-Being*, Oxford Univ. Press, USA (2016).

QUINE, W. V. *Philosophy of logic*, Harvard Univ. Press, USA (1994).

REDHEAD, M. “A philosopher looks at quantum field theory” In BROWN, H. R. & HARRÉ, R. *Philosophical foundations of quantum field theory*, Clarendon Press, UK (1990).

REICHENBACH, H. *The direction of time*, Dover Publicatinos, Inc, New York (2013).

RESNICK, R. & HALLIDAY, D. *Física – parte 1*, LTC & Sedegra, RJ (1966).

ROJO, A. & BLOCH, A. *The principle of least action – history and physics*, Cambridge Univ. Press, UK (2018).

RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis 3rd edition* – McGraw-Hill, Inc. USA (1976).

RUSSELL, B. & WHITEHEAD, A. N. *Principia Mathematica - 2nd edition*, Cambridge Univ. Press, UK (1973).

RUSSELL, B. *The principles of mathematics*, W. W. Norton & Company, Inc. New York (1903).

- *A critical exposition of the philosophy of Leibniz – 3rd edition*, George Allen & Unwin LTD, London (1949).

- *Análise da matéria*, Zahar Editores, Brasil (1978).

- *Introdução à filosofia matemática*, Ed. Zahar, Rio (1981).

RYDER, L. H. *Quantum field theory*, Cambridge Univ. Press, UK (1994).

SAKURAI, J. J. & NAPOLITANO, J. *Mecânica quântica moderna* – Segunda edição, Bookman, Porto Alegre (2013).

SCHIESSEL, H. & FRIEDRICH, C. & BLUMEN, A. “Applications to problems in polymer physics and rheology” In HILFER, R. *Applications of fractional calculus in physics*, World Scientific, Singapore (2000).

SCHROEDER, D. V. & PESKIN, M. E. *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley Publishing Company, USA & Canada (1995).

SCHULMAN, L. S. *Techniques and applications of path integration*, Dover Publications, Inc., New York (2006).

SCHWEBER, S. S. *An introduction to relativistic quantum field theory*, Dover Publications Inc, New York (2005).

- *QED and the men who made it – Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga*, Princeton University Press, Princeton – USA (1994).

SCUCUGLIA, R. R. S. & BARBOSA, L. M. & BORBA, M. C. & FERREIRA, A. L. A. “The Use of Digital Technology to Estimate a Value of Pi: Teachers Solutions on Squaring the Circle in a Graduate Course in Brazil”. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, v. 23, p. 1-15, (2021).

SCUCUGLIA, R. & BALIEIRO FILHO, I. F. & SCHMIDT TOTTI, L. A. & BERTOLUCCI, G. A. “Aspectos estéticos em demonstrações de Bonaventura Cavalieri”. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, [S. l.], v. 8, n. 22, p. 55-70 (2020).

<https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/3985>.

SHAPIRO, S. “Mathematics and reality”, *Philosophy of Science*, Vol. 50, Nº4, pp. 523-548 (1983).

- *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford Univ. Press, USA (1997).

SHEFFER, H. M. "A set of Five Independent Postulates for Boolean Algebra, with application to logical constants.", *Transactions, American Mathematical Society* 14, pp. 481-88 (1913).

SMITH, P. *An introduction to Gödel's theorem*, Cambridge Univ. Press, UK (2007).

SPIEGEL, M. R. *Análise vetorial*, LTC & Sedegra LTDA, RJ (1961).

STEINER, M. *The applicability of mathematics as a philosophical problem*, Harvard Univ. Press, UK (1998).

SUNDHOLM, G. *Questions of proof*, Manuscrito - Revista Internacional de Filosofia, Número especial: Filosofia da Matemática, Vol XVI, Nº2, pp. 46-70, Campinas (1993).

THALLER, B. *The Dirac equation*, Springer-Verlag, USA (1992).

THAYER, J. *Operadores auto-adjuntos e equações diferenciais parciais*, Editora do Impa, RJ (2016).

TURING, A. M. 'Lecture to the London Mathematical Society on 20 February 1947', reprinted in INCE, D.C.(1992), ed., *Collected Works of A.M. Turing: Mechanical Intelligence*, Amsterdam: North Holland. pp.87-105 (1947).

VALTONEM, M. & KARTUNNEN, H. *The three body problem*, Cambridge Univ. Press, UK (2005).

WEINGARD, R. "Virtual particles and the interpretation of quantum field theory" In BROWN, H. R. & HARRÉ, R. *Philosophical foundations of quantum field theory*, Clarendo Press, UK (1990).

WEYL, H. *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover Publications, Inc , New York (1950).

- "Quantenmechanik und Gruppentheorie". *Z. Physik* **46**, 1-46 (1927).

WHITAKER, E. T. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 4th edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, (1937).

WILDER, R. *Introduction to the foundations of mathematics*, 2nd Edition, Wiley & Sons, Inc. Japan (1965).

WITTGENSTEIN, L. *Tractatus logico-philosophicus*, Companhia Editora Nacional & Editora da Universidade de São Paulo SP (1968).

WURTRICH, S. *The genesis of Feynman diagrams*, Dordrecht, Springer Verlag, London (2010).

YOURGRAU, W. & MANDELSTAM, S. *Variational principles in dynamics and quantum theory*, Dover publications Inc., New York (1979).

A Editora Fi é especializada na editoração, publicação e divulgação de pesquisa acadêmica/científica das humanidades, sob acesso aberto, produzida em parceria das mais diversas instituições de ensino superior no Brasil. Conheça nosso catálogo e siga as páginas oficiais nas principais redes sociais para acompanhar novos lançamentos e eventos.



www.editorafi.org
contato@editorafi.org